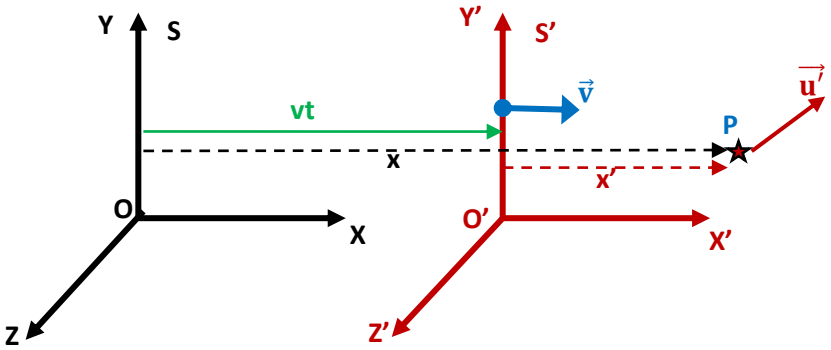
Incontro 06

Composizione relativistica delle velocità e delle accelerazioni

Riportiamo quanto è noto finora.

Sistemi di Riferimento



Trasformazioni di Lorentz

$$\begin{cases} \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad ; \quad \beta = \frac{v}{c} \\ x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{cases}$$

Composizione delle velocità

Pensiamo ad una particella P "vista" sia da O che da O'.

Vista da O:

Nell'istante $t = t_0$ la particella si trova il posizione (x_0, y_0, z_0) : Evento 0

$t = t_1$ la particella si trova il posizione (x_1, y_1, z_1) : Evento 1

Gli intervalli di tempo e di distanza sono quindi:

$$\Delta t = t_1 - t_0 \qquad \Delta x = x_1 - x_0$$
$$\Delta y = y_1 - y_0$$
$$\Delta z = z_1 - z_0$$

La velocità della particella in questo intervallo di tempo è data da:

$$u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \text{(a rigore si dovrebbe fare il limite per } \Delta t \to 0\text{)}$$
$$u_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$
$$u_z = \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

Vista da O':

Evento 0

$$t'_0 = \gamma\left(t_0 - \frac{vx_0}{c^2}\right)$$
$$x'_0 = \gamma(x_0 - vt_0)$$
$$y'_0 = y_0$$
$$z'_0 = z_0$$

Evento 1

$$t'_1 = \gamma\left(t_1 - \frac{vx_1}{c^2}\right)$$
$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt_1)$$
$$y'_1 = y_1$$
$$z'_1 = z_1$$

La velocità della particella in questo intervallo di tempo è data da:

$$u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \qquad \text{(a rigore si dovrebbe fare il limite per } \Delta t' \to 0\text{)}$$
$$u'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'}$$
$$u'_z = \frac{\Delta z'}{\Delta t'}$$

Tenendo conto che $\Delta t' = t'_1 - t'_0$; $\Delta x' = x'_1 - x'_0$; $\Delta y' = y'_1 - y'_0$; $\Delta z' = z'_1 - z'_0$
si può scrivere:

$$u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma(\Delta x - v\Delta t)}{\gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right)} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$
$$u'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right)} = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}$$
$$u'_z = \frac{\Delta z'}{\Delta t'} = \frac{\Delta z}{\gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right)} = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}$$

Analogamente è possibile determinare il legame fra accelerazioni.
È ovviamente possibile fare la dimostrazione, ma sarebbe necessario ricorrere al Calcolo delle Derivate.
Poiché questo appare essere eccessivo, si preferisce riportare il risultato finale:

$$a'_x = \frac{a_x}{\gamma^3\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^3}$$
$$a'_y = \frac{1}{\gamma^2\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^2}\left(a_y + a_x\frac{\frac{vu_y}{c^2}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}\right)$$
$$a'_z = \frac{1}{\gamma^2\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^2}\left(a_z + a_x\frac{\frac{vu_z}{c^2}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}\right)$$

Le formule appena scritte mostrano, nella loro complessità, le difficoltà operative richieste per dimostrarle.
La ragione per cui si è voluto mostrarle è dovuta al fatto che, se si fa tendere c all'∞ si ottiene:

$$a'_x = a_x$$
$$a'_y = a_y$$
$$a'_z = a_z$$

Si ottiene cioè la Relatività Galileiana.

Cioè:

ancora una volta la Relatività Galileiana appare essere il limite cui tende la Relatività di Einstein quando si fa tendere c all'infinito.

Ed a questo punto possiamo "entrare"nella Relatività Ristretta, e quindi vederne i caratteri principali.