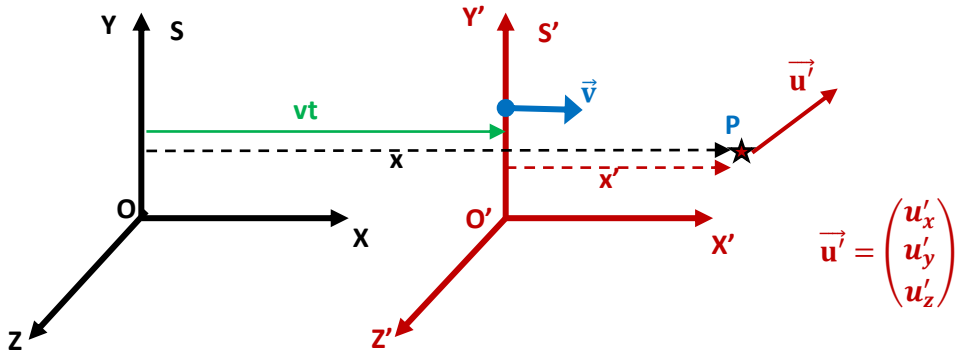
Incontro 05

Le trasformazioni di Lorentz

In precedenza abbiamo introdotto due Riferimenti Inerziali, in moto uno rispetto all'altro, come mostrato qui sotto:



Ci siamo anche proposti di descrivere il moto della particella P <<come visto>> sia da un osservatore fisso in S che da un osservatore fisso in S', e di trovare una regola che permetta di passare da una descrizione all'altra.
Abbiamo anche accennato a come il problema sia stato risolto da Galileo, dando i risultati della Relatività Galileiana:

$x' = x - vt$ $\qquad \vec{u} = \vec{u'} + \vec{v}$

$t' = t$

$y' = y$ $\qquad z' = z$

Solo che adesso abbiamo un problema in più:

dobbiamo rispettare i due Postulati di Einstein.

Come vedremo, i risultati della Relatività Galileiana "sarebbero quelli corretti" se la velocità della luce fosse infinita,
cosa del resto perfettamente accettabile/comprensibile ai tempi di Galileo e di Newton, tenendo conto delle tecnologie disponibili allora.

La soluzione trovata da Einstein sta nelle Trasformazioni di Lorentz, trovate nel 1904 da Hendrik Lorentz (1853 - 1928) nel tentativo di "salvare" l'Etere Cosmico.
Nel 1905 Einstein ha trovato che queste equazioni - una volta scartato il concetto di Etere – erano proprio "quelle" che soddisfacevano ai suoi postulati.

Il "dimostrare" queste equazioni rappresenta per noi un impegno matematico eccessivo.

Appare invece essere più produttivo "dare" queste equazioni, facendo certamente un atto di fede e cercando di comprenderne il significato ricorrendo ad esempi significativi.

Già in precedenza è stata fatta una osservazione:

il fatto che la velocità della luce nel vuoto sia la stessa per tutti i Riferimenti Inerziali (contro ogni previsione della Relatività Galileiana) ha conseguenze sulla descrizione sia dello spazio che del tempo,

anzi, come vedremo fra un attimo,

ci sarà una dipendenza reciproca fra lo spazio in cui accade un evento ed il tempo in cui questo avviene.

Che cosa dobbiamo allora fare - per prima cosa - su di noi?

Vincere quelli che Einstein ha chiamato <<i pre-concetti che ci siamo costruiti nella nostra mente durante gli anni che abbiamo vissuto>>

e prepararsi a dare allo Spazio ed al Tempo una diversa interpretazione.

Riportiamo allora, con riferimento ai due Riferimenti Inerziali rappresentati all'inizio, le Trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Si noti come, al tendere della velocità della luce nel vuoto c all'infinito, queste formule tendono a diventare <<Relatività Galileiana>>

La loro scrittura non è delle più semplici.

È possibile però semplificare formalmente la scrittura:

Poniamo: $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$; $\beta = \dfrac{v}{c}$

Le formule scritte qui sopra diventano:

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{v}{c} \qquad \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{vx}{c^2}\right) \end{cases}$$

Il coefficiente

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

è generalmente noto come <<Fattore di Lorentz>>

La prima osservazione da fare è che – assumendo come valide le equazioni scritte – tempo e spazio sono relativi e non assoluti, come invece era ritenuto dalla Meccanica Classica.

Ma: O' cosa potrebbe dire dal suo punto di vista?
Solo che O si muove rispetto ad O' con velocità -v (v verso –x).

Le Trasformazioni di Lorentz Inverse diventano quindi:

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \dfrac{vx'}{c^2}\right) \end{cases}$$

È vero/accettabile tutto questo oppure no?
Le bombe di Hiroshima e Nagasaki tendono a confermare il "si".

NB: si è scritto: <<vero/accettabile>>.
Si è cioè voluto sottolineare che <<nessuna Teoria è vera>>,
ma che qualsiasi Teoria <<è o non è accettabile>> a seconda se l'esperimento conferma o no le sue previsioni.

Concedetemi di fare una digressione:

noi usiamo la Matematica per descrivere il mondo fisico, ma la Matematica è stata inventata dall'Uomo, seguendo le Leggi della Logica Umana "*utilizzate in quel momento*".
Non va però dimenticato che anche fra le Logiche Umane esistono delle differenze.
P.es. la Logica Indiana, più vecchia dell'ordine di 2000 anni rispetto alla Logica Greca, non si identifica con la Logica Greca, ma ne riconosce – oggi – solo la <<maggiore efficacia>>.
Non può inoltre passare sotto silenzio l'attuale Fuzzy Logic, la Logica Sfumata di Zadeh (presentata nel 1965), oggi utilizzata prevalentemente nell'intelligenza artificiale.
Di conseguenza qualsiasi Teoria Fisica, fondata sulla Logica Umana, porta con sé tutti i limiti degli esseri umani.

Ecco perché, accanto alla parola <<vera>> mi sono affrettato ad aggiungere la parola <<accettabile>>.

Ritorniamo alle Trasformazioni di Lorentz.
Abbiamo detto che il Secondo Postulato di Einstein prevede, PER TUTTI GLI OSSERVATORI INERZIALI, che la luce abbia sempre la stessa velocità c.

Nel Riferimento S lanciamo un segnale luminoso in direzione +x p.es. nell'istante quando i due Riferimenti O ed O' coincidono, ed i due orologi segnano ZERO.
Esso verrà visto in S come un segnale che si sposta con velocità c :

$$x = ct$$

Ed in S'?

$$x' = \gamma\,(x - vt)$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

$$\frac{x'}{t'} = \frac{\gamma\,(x - vt)}{\gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)} = \frac{(ct - vt)}{\left(t - \frac{vct}{c^2}\right)} = \frac{(ct - vt)}{\frac{1}{c^2}(c^2t - vct)} = \frac{(ct - vt)}{\frac{c}{c^2}(ct - vt)} = c$$

Cioè: anche in S' si vede il lampo di luce muoversi con velocità c, indipendentemente dalla velocità v che S' ha rispetto ad S.

Il Secondo Postulato della Relatività risulta quindi rispettato.

Volendo dire qualche cosa in più sull'argomento, è anche possibile osservare che

- **mentre "t" viene espresso in "secondi"**
- **"x, y, z" sono espressi in "metri"**

il che non appare essere <<molto opportuno>> per rappresentare <<uno spazio>>, sia pure a 4 dimensioni.

Ma, se al posto di "t" si sceglie come coordinata "ct", allora ogni differenza di unità di misura viene a cadere.

E le Trasformazioni di Lorentz?

In precedenza si era trovato che:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{cases}$$

Assumendo come variabile "ct" al posto di "t" è possibile scrivere:

$$\begin{cases} x' = \gamma\left(x - \frac{v}{c}\,ct\right) = \gamma(x - \beta\,ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = c\gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) = \gamma(ct - \beta\,x) \end{cases}$$

Le espressioni appaiono essere molto più simmetriche e … facili da ricordare.

Altra soluzione: scriverle in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}$$

L'importante è avere ben presente la legge LICO di moltiplicazione delle matrici.