

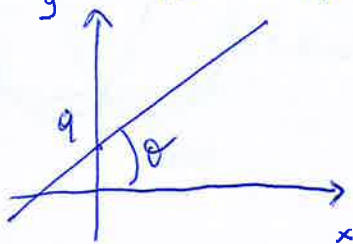
L'OTTIMIZZAZIONE

Elementi di Matematica

1

1) La retta

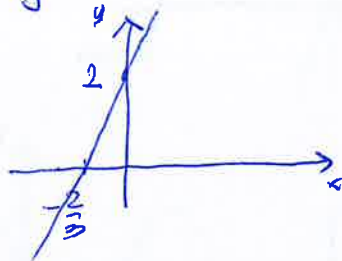
$ax + by + c = 0$ o $y = mx + q$
m coeff. angolare (pendenza); q intersezione asse y



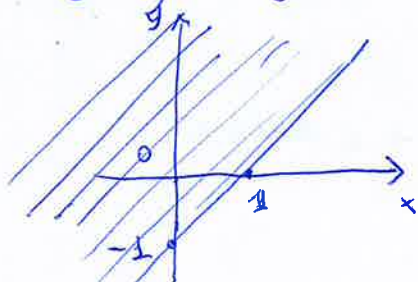
$$m = \tan \theta$$

Es. 1) Rappresentazione di rette.

$$y = 3x + 2 \quad \begin{cases} x=0 & y=2 \\ y=0 & x=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

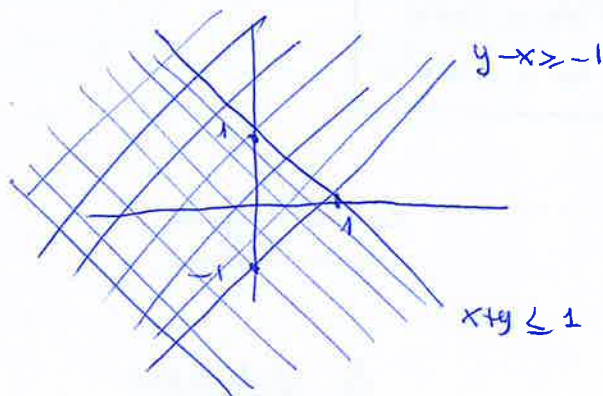


Es. 2) $y = x - 1$



Come rappresentare la zona (semipiano)?
 $y - x \geq -1$?
trovando (origine)
 $x, y \geq 0$
 $0 \geq -1$ vero

Come trovare le zone di piano comprese tra $\begin{cases} y - x \geq -1 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$?



rappresentare le due zone
e intersezione (parte comune)

La parte graduata!

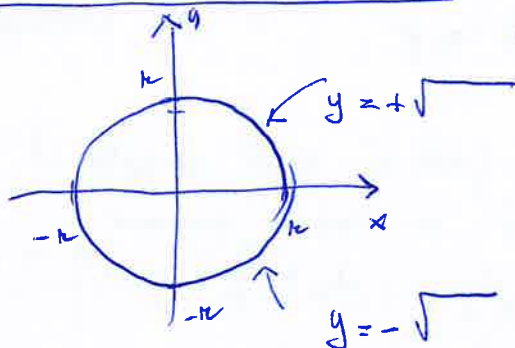
2) Le conifrenze

$$x^2 + y^2 = r^2$$

con centro $O(0,0)$ e raggio r

Semiconifrenze

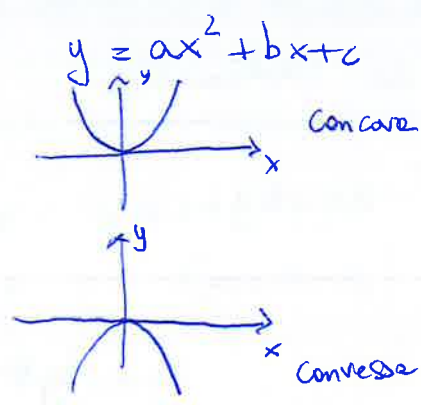
$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$



⇒

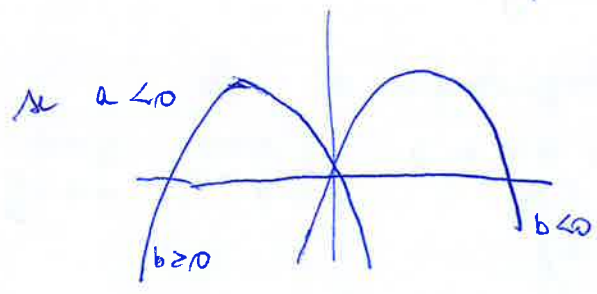
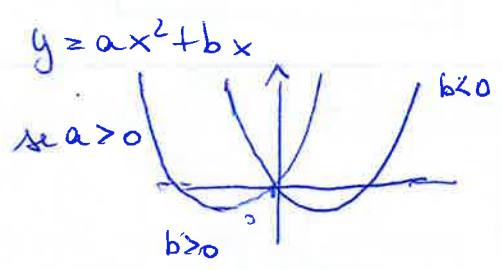
3) la parabola

$$y = ax^2 \begin{cases} a > 0 \\ a < 0 \end{cases}$$

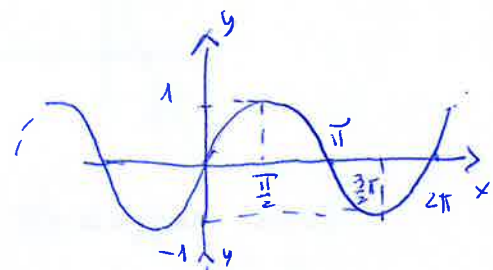


$$b = c = 0$$

$$c \geq 0$$

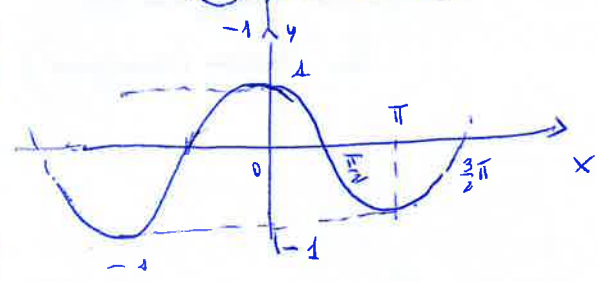


4) $y = \sin x$



$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$y = \cos x$

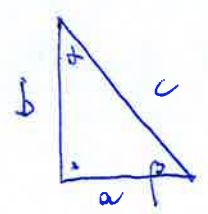


$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

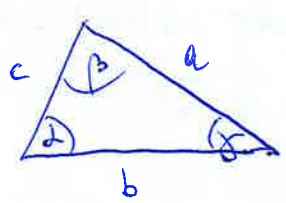
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{a}{c} &= \sin \alpha & \frac{b}{c} &= \cos \alpha & \dots \\ \frac{a}{b} &= \tan \alpha & \dots & \end{aligned}$$

Δ rettangoli



$$\begin{aligned} b \sin \beta &= a \sin \alpha & \dots \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned}$$

Δ qualunque
 teor. dei seni
 " del coseno

$$\begin{aligned} y &= \arcsin x \\ y &= \arccos x \\ y &= \arctan x \end{aligned}$$

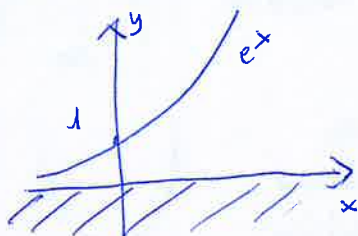
funzioni inverse
 cui $\sin, \cos,$
Radiani

quale è quell'angolo il
 cui seno è un certo numero?
 $\frac{\text{arco}}{r} = \frac{l}{r}$ $\pi \rightarrow 180^\circ$



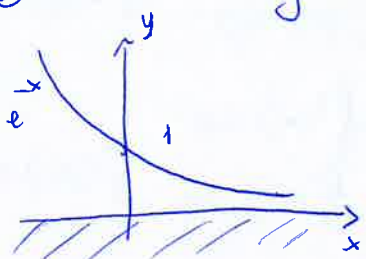
5) Esponenziali e logaritmi, sinh x, cosh x

$y = e^x$



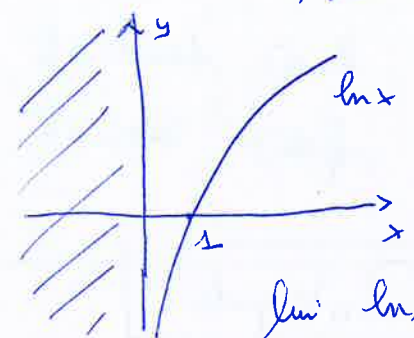
$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

$y = e^{-x}$



$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$

$y = \ln x$



e numero di Neper
 $\approx 2,718 \dots$

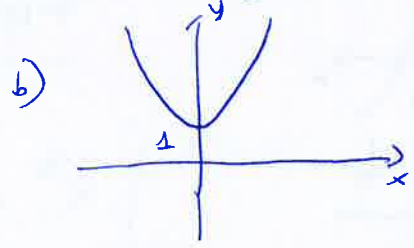
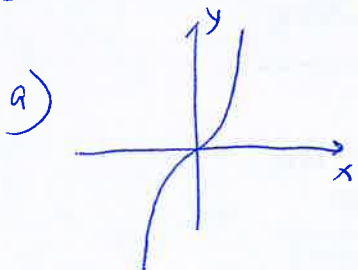
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

seno iperbolico a)

$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

coseno iperbolico b)



6) Funzioni, derivate

$y = f(x)$

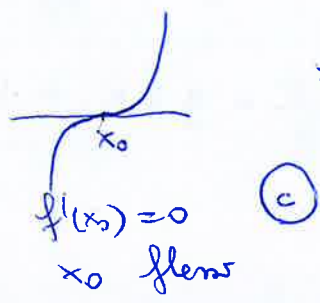
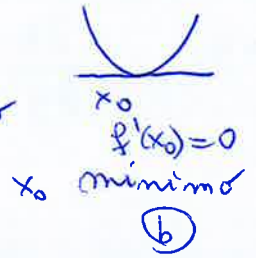
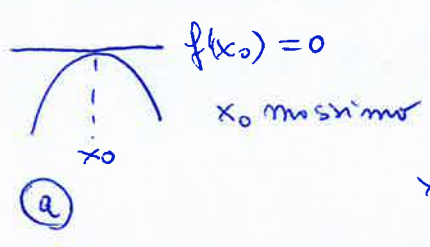
$y' = \frac{df}{dx}$

derivate di $f(x)$

Derivate importanti

$f(x) : x^n$	e^x	$\ln x$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\frac{g(x)}{h(x)}$	$g(x) \cdot h(x)$
$f'(x) : nx^{n-1}$	e^x	$\frac{1}{x}$	$\cos x$	$-\sin x$	$1 + \cos^2 x$	$\frac{h(x)g'(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$	$g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$

Significati geometrici



$\Rightarrow$ x_0 punti stazionari

(4)

7) Ricerca di massimi e minimi di funzioni

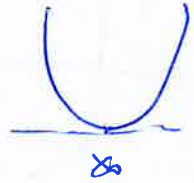
$f(x)$ crescente $f'(x) > 0$
 $f(x)$ decrescente $f'(x) < 0$

$f'(x_0) = 0$ x_0 massimo
 relativo



$f(x)$ decrescente $f'(x) < 0$

$f(x)$ crescente $f'(x) > 0$ $f'(x_0) = 0$ x_0
 minimo
 relativo



8) Integrali

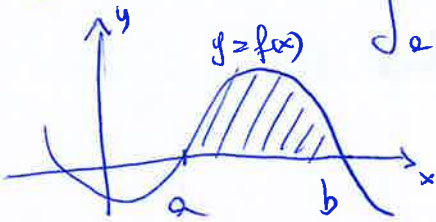
Indefiniti:

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad C \text{ costante}$$

tale che $F'(x) = f(x)$

Definiti:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{calcolo delle aree}$$



$F(x)$ primitiva

Integrali immediati

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad ;$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad \dots$$

9) Derivate parziali

Sia $z = f(x, y)$ funzione a due variabili

$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ derivata parziale di $f(x, y)$ rispetto a x , con y costante

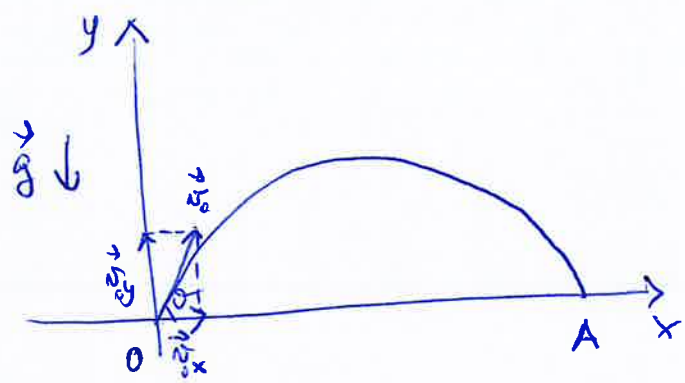
$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ " " $z, \quad z = x^2 y + x \ln y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot 2x + 1 \cdot \ln y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cdot 1 + x \cdot \frac{1}{y}$$

a) L'ottimizzazione in fisica

Un semplice problema: la gittata del proiettile.



$$\begin{aligned}\vec{v}_0 &= \vec{v}_{0x} + \vec{v}_{0y} \\ v_{0x} &= v_0 \cos \theta \\ v_{0y} &= v_0 \sin \theta\end{aligned}$$

Legge del moto: lungo l'asse x rettilineo uniforme
lungo l'asse y rettilineo unif. accelerato
con $g < 0$ (il moto si oppone a $\vec{g}$)

$$\begin{cases} x = v_{0x} t \\ y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}t &= \frac{x}{v_{0x}} & y &= v_{0y} \frac{x}{v_{0x}} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{0x}^2} & \frac{v_{0y}}{v_{0x}} &= \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ y &= x \tan \theta - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \theta}\end{aligned}$$

la gittata è la lunghezza $\overline{OA}$ dove (int) $y \geq 0$

$$x \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \frac{1}{2} \frac{g x^2}{v_0^2 \cos^2 \theta} = 0 \quad 2x \sin \theta \cos \theta v_0^2 = g x^2 \quad \text{le soluzioni sono } x \geq 0 \text{ e}$$

$$\begin{aligned}x &= \frac{2 \sin \theta \cos \theta \cdot v_0^2}{g} \\ &\downarrow \\ &= \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta\end{aligned}$$

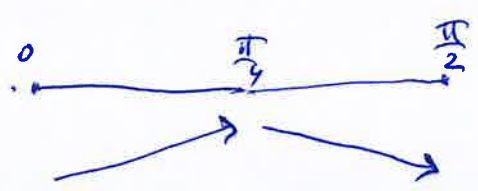
questo è la gittata!

per quale angolo θ tale gittata è massima?

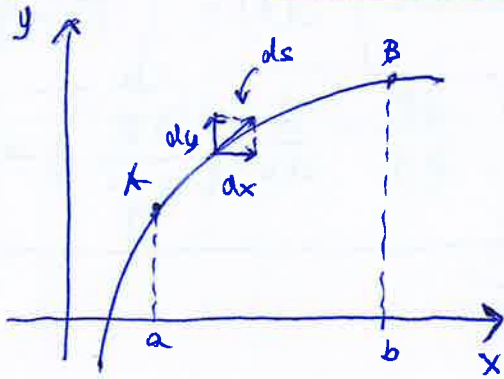
1) metodo $\sin 2\theta = 1$ come massimo valore $\Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \quad \theta = \frac{\pi}{4}$

2) metodo $x' = \frac{v_0^2}{g} 2 \cos 2\theta > 0 \quad \cos 2\theta > 0 \quad 0 < 2\theta < \frac{\pi}{2} \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$

la f. è crescente quindi in $\theta = \frac{\pi}{4}$ ha un massimo



10) Lunghezza di una curva



Il tratto ds infinitesimo di curva è il t. di Pitagora può essere scritto:

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$\downarrow$$

$$dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\downarrow$$

$$dx \sqrt{1 + (y')^2}$$

$$\Rightarrow L_{AB} = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

questo integrale è spesso difficile da calcolare!

11) Principi variazionali ed equazioni di Eulero-Lagrange

Metodi della matematica e della fisica che permettono di determinare l'evoluzione o la configurazione di un sistema trovando il minimo, il massimo o un valore stazionario di una grandezza detta funzionale

Esempi Il Principio di minima azione

Azione $S(q) = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$ $L = T - V$

Il principio di Hamilton afferma che il moto del ^{Lagrangiana} sistema

soddisfa $\delta S = 0$ cioè l'azione è stazionaria rispetto a variazioni infinitesime di $q(t)$. (variazioni inf. nulle)

$\Rightarrow$ Equazioni di Eulero-Lagrange

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0}$$

In generale dato il funzionale

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

⇒ equazioni di Eulero

Altri funzionali variazionali:

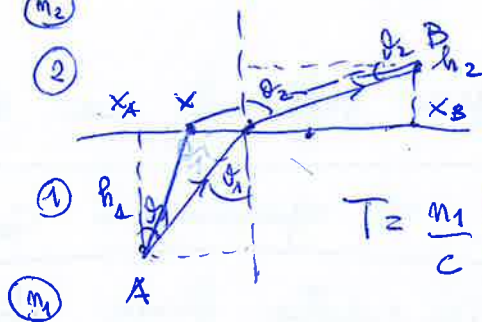
Principio di Fermat - Snell:

La luce percorre tra due punti il cammino per cui il tempo di percorrenza è stazionario (per minimo)

$$T = \frac{1}{c} \int_a^b n ds$$

n indice di rifrazione

Snell:



$$T = \frac{n_1}{c} \sqrt{(x-x_A)^2 + h_1^2} + \frac{n_2}{c} \sqrt{(x_B-x)^2 + h_2^2}$$

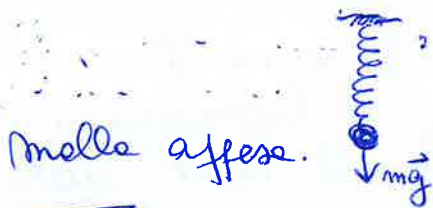
$$\frac{dT}{dx} = 0$$

P. di Fermat

$$\frac{n_1}{c} \frac{x-x_A}{\sqrt{(x-x_A)^2 + h_1^2}} = \frac{n_2}{c} \frac{x_B-x}{\sqrt{(x_B-x)^2 + h_2^2}}$$

$$\Rightarrow n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Minime energia potenziale.



Molla appesa.

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2 \ominus mgx$$

energia potenziale totale!

il lavoro fatto allungando la molla e contro la f. di gravità

$$x = \frac{mg}{k} \quad (\text{equilibrio } mg = kx) \quad \text{tre forze!}$$

$$0 = \frac{dU}{dx} = kx - mg = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} > 0 = k \Rightarrow \text{equilibrio stabile}$$



$$\text{se } \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} < 0 \text{ eq. instabile}$$



Brachistochrone

(8)

Rappresenta la curva lungo la quale un più materiale soggetto solo alla forza di gravità, scende da A a B nel minor tempo possibile, cioè minimizza il tempo

Il risultato non è una retta ma un arco di cicloide

Si utilizza per dimostrare ciò il calcolo delle variazioni. Notando che B è spostato rispetto alla verticale da A altrimenti il tempo minimo è rappresentato da una retta! Infatti nel moto rett. unif. accelerato (caduta dei gravi)

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad (v_0=0) \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$



In generale $T = \int \frac{ds}{v}$ $ds = \sqrt{1+(y')^2} dx$
v velocità

$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$ (Conserv. dell'energia & forze conservative)

$$v = \sqrt{2gh}$$

$$= \sqrt{2gy}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{\sqrt{1+(x')^2}}{y} dy \quad x' = \frac{dx}{dy}$$

Su curva y che minimizza il T

→ Equazione di Eulero-Lagrange

Si minimizza $\int F(y, x') dy$ con $F(y, x') = \sqrt{\frac{1+(x')^2}{y}}$

eq. $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right) = 0$

⇒ risolvendo

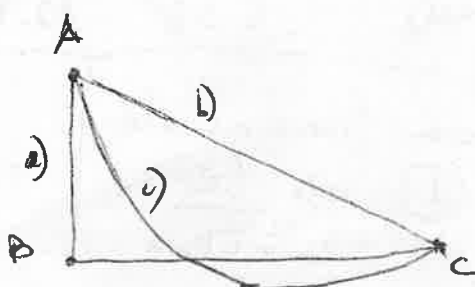
$$x = a(\theta - \sin \theta)$$

$$y = a(1 - \cos \theta)$$

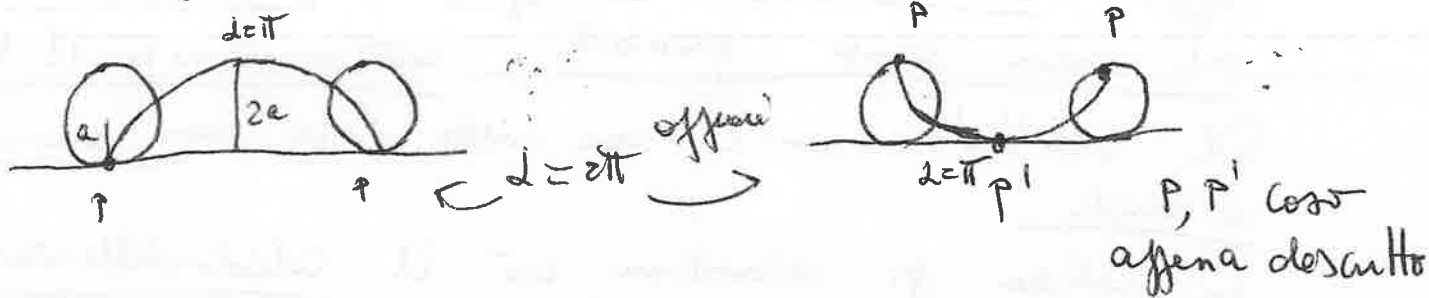
una sforata curva in c nel minor tempo possibile se percorre la curva c) arco di cicloide!

Il gioco inclinato (retto) porta al min. tempo possibile ⇒

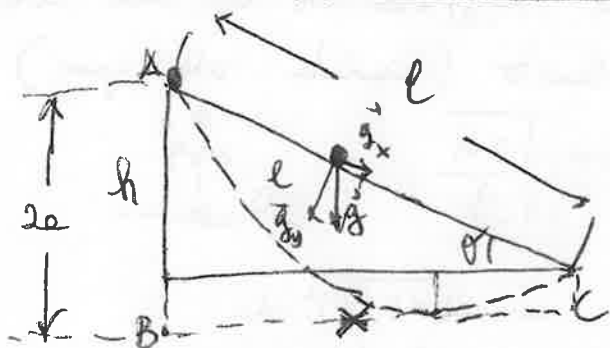
L'angolo di rotazione θ di a-retto θ che genera la cicloide θ parametr. della cicloide



Le uderide si genera quando un finto di una sf. per come nell'aria una curva, la uderide appunto mentre la sf. muove senza strisciare.



Confronto con la discesa da un piano inclinato



$$g_x = g \sin \theta$$

$$l = \frac{h}{\sin \theta}$$

$$l = \frac{1}{2} g \sin \theta t^2$$

$$\frac{h}{\sin \theta} = \frac{1}{2} g \sin \theta t^2$$

$$h = \frac{g \sin^2 \theta}{2} t^2 \quad T_{Ac} = \sqrt{\frac{2h}{g \sin^2 \theta}} = \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{\frac{2h}{g}} > \sqrt{\frac{2h}{g}} \text{ (temp. verticale)}$$

equazione delle uderide

a ogni sf. de genera la uderide

$$\begin{cases} x = a(d - \sin d) \\ y = h - a(1 - \cos d) \end{cases}$$

finto A(0, h), C(x, 0)

$$x = \frac{h}{\tan \theta}$$

foglio A e B C y=0

$$\begin{aligned} x &= a(d - \sin d) \\ h &= a(1 - \cos d) \end{aligned} \Rightarrow \frac{h}{x} = \frac{1 - \cos d}{d - \sin d}$$

$$\frac{h}{x} = \frac{1 - \cos d}{d - \sin d} \Rightarrow \frac{h}{x} = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$a = \frac{h}{1 - \cos d}$$

$$t_c = d \sqrt{\frac{h}{g(1 - \cos d)}}$$

$$\frac{h}{x} = \frac{1 - \cos d}{d - \sin d} \quad (1)$$

$$t_c = d \sqrt{\frac{a}{g}} \text{ si dimostre temp. lungo uderide}$$

$$\frac{t_c}{t_{pasc}} = d \sqrt{\frac{h}{g(1 - \cos d)}} \cdot \sin \theta \sqrt{\frac{g}{2h}} = \frac{d \sin \theta}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{1 - \cos d}}$$

$$0 \leq d \leq 2\pi$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

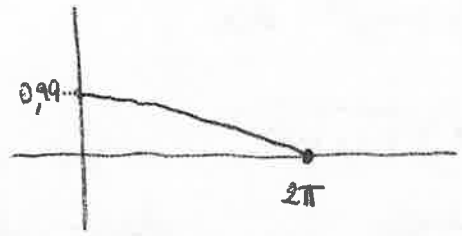
si risolve equazione trascendente

$$(1) \Rightarrow \text{si muove } (2) \Rightarrow \frac{t_c}{t_{pasc}}$$

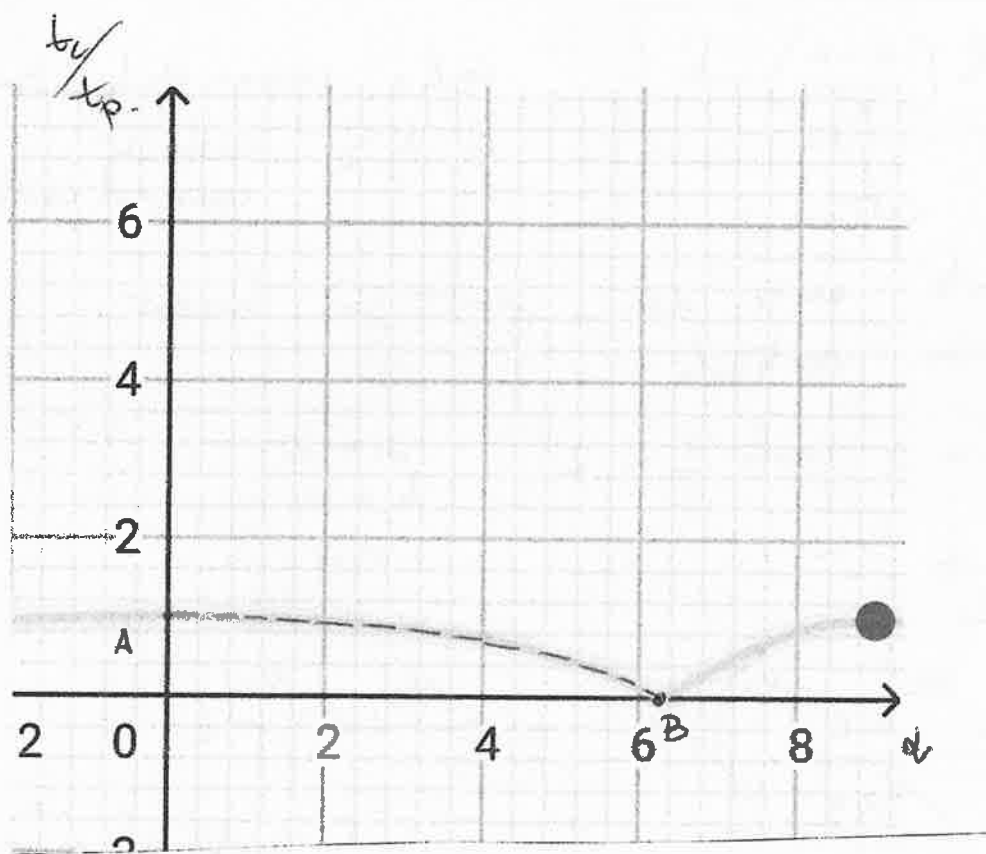
(b)

$$\frac{t_c}{t_{pura}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \sin\left(\arctg \frac{1 - \cos 2}{2 - \sin 2}\right) \sqrt{\frac{1}{1 - \cos 2}} \quad \text{il grafico}$$

è del tipo



sempre < 1 ! con.



A (0, 0,99...)

B (2π, 0)

Catenaria

è una curva che assume una fune inestensibile sotto l'effetto della forza peso. Se fune è sospesa tra due punti. Se metodo variazionale permette di trovare l'equazione della curva minimizzando l'energia potenziale gravitazionale

$$U(y) = \rho g \int y \, ds$$

ρ densità, g acc. di gravità
 $ds = \sqrt{1+y'^2} \, dx$ lunghezza infinitesimale della fune
 si ha un vincolo che è la
 $L = \int \sqrt{1+y'^2} \, dx$

$$U(y) = \rho g \int y \sqrt{1+y'^2} \, dx$$

lunghezza della fune

Si usa un moltiplicatore di Lagrange λ (1)

$$J(y) = \int (p(y) + \lambda) \sqrt{1+y'^2} dx$$

$$F(y, y') = (p(y) + \lambda) \sqrt{1+y'^2}$$

di Eulero-Lagrange ...

$$\boxed{y(x) = a \cosh\left(\frac{x-c}{a}\right) - b}$$

a , altezza costante

c , coordinate orizz. del

b , traslazione verticale

Si usano le equ. def. da un calcolo

$\cosh$ = coseno iperbolico

a, b, c costanti condiz. al contorno

finito fin. basso

per $y(x) = 2 \cosh \frac{x}{2} - 2$

$$a = 2$$

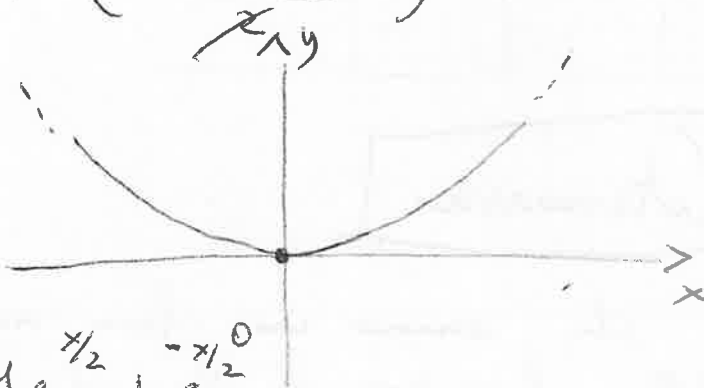
$$b = 2$$

$$c = 0$$

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

$$y(x) = 2 \left(\frac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{2} \right) - 2 = e^{x/2} + e^{-x/2} - 2$$

Grafico



$$y(0) = e^0 + e^{-0} - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = +\infty$$

$$y'(x) = \frac{1}{2} e^{x/2} - \frac{1}{2} e^{-x/2}$$

$$y'(x) > 0 \quad e^{x/2} > e^{-x/2} \quad e^{x/2} > \frac{1}{e^{x/2}} \quad e^x > 1 \quad x > 0$$

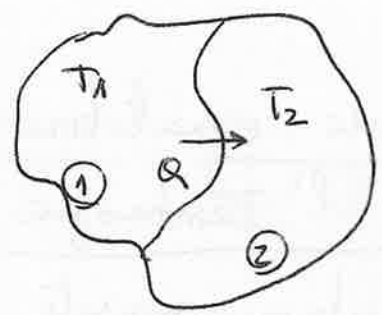
minimo in $x=0$

non è una parabola!!

ENTROPIA

Consideriamo le due def. di entropia: 1) quella termodinamica e 2) quella di Boltzmann, probabilistica

1) Un sistema isolato è fatto da due sistemi 1 e 2; il primo ha temperatura T_1 , il secondo T_2 con $T_1 > T_2$. A contatto i due scambiano calore Q che spontaneamente passa da 1 a 2



l'entropia $S_1 = - \frac{Q}{T_1}$ calore

$S_2 = \frac{Q}{T_2}$ calore

ΔS variazione di entropia

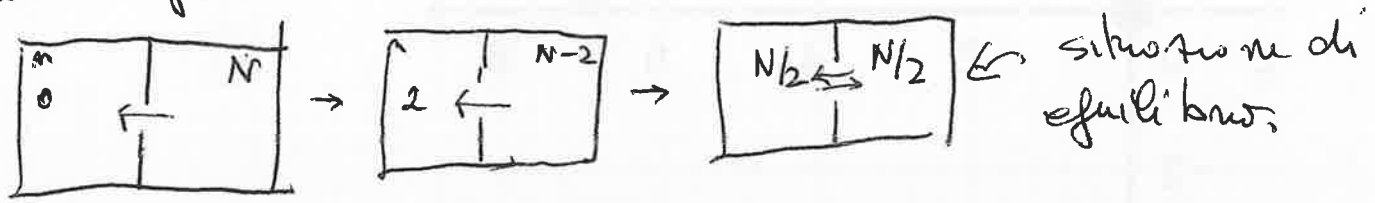
$\Delta S = \frac{Q}{T_2} - \frac{Q}{T_1} = Q \left(\frac{T_1 - T_2}{T_2 T_1} \right)$ poiché $T_2 < T_1$

$\Delta S \geq 0$ $\Delta S = 0$ se $T_1 = T_2$ cond. di equilibrio termico
ed è questo lo stato di massima entropia che si raggiunge spontaneamente

2) $S = k_B \ln \frac{N!}{(N-n)! n!}$ leg. cost. di Boltzmann

N microstati
 n microstati appartenenti ad un microstato

Ades. reagenti con molecole di fos. n da una parte e $N-n$ dell'altra. E' presente un setto divisorio con apertura.



Se $k_B \geq 1$ per complete

$$N = 2 \quad m = 0 \quad S = 0$$

$$N = 2 = 5 \quad m = 2 \quad S = \ln 21 \approx 3,04$$

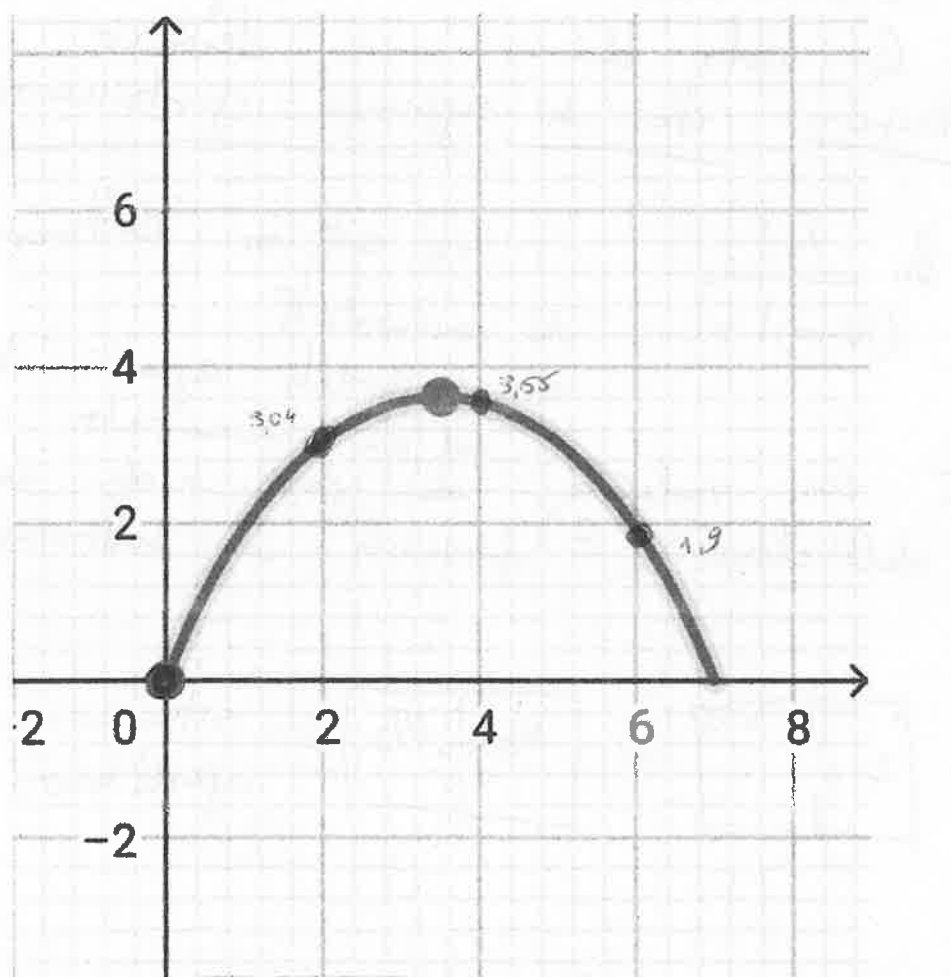
$$N = 4 = 3 \quad m = 4 \quad S = \ln 35 \approx 3,55$$

$$N = 6 = 1 \quad m = 6 \quad S = \ln 7 \approx 1,9$$

Si fa un max entropie $\Rightarrow m = 3,5 \quad N - m = 3,5$
Situazione di equilibrio

Quindi le situazioni di equilibrio compaiono
dove c'è un massimo per l'Entropia!

Tali situazioni sono spontaneamente raggiunte
in sistemi isolati



Problemi di massimo e minimo

- 1) Consideriamo una scatola cilindrica con fissata superficie totale $S = 2\pi rh + \pi r^2 = k$ costante

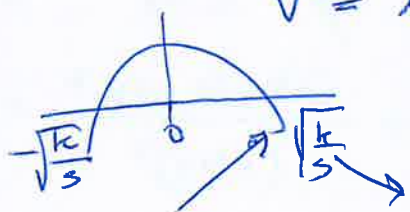
$$rh + r^2 = k \quad h = \frac{k - r^2}{r}$$

Trovare la scatola che rende massimo il volume!



$$V = \pi r^2 \cdot h = \pi r^2 \left(\frac{k - r^2}{r} \right) = \pi rk - \pi r^3$$

$$V' = \pi k - 3\pi r^2 \geq 0 \quad k - 3r^2 \geq 0 \quad \therefore$$



massimo $\Rightarrow r = \sqrt{\frac{k}{3}}$
 $0 \leq r \leq \sqrt{\frac{k}{3}}$
 $r^2 = \frac{k}{3} \quad k = 3r^2$

$$h = \frac{3r^2 - r^2}{r} = \frac{2r^2}{r} = 2r$$

$$\boxed{h = 2r}$$

- 2) Una nave consuma $36 + 0,04v^2$ lt/ora di navigazione, tonnellate di combustibile, v velocità in km/h. Trovare la quantità di combustibile consumata in 2000 km di viaggio, la velocità che tiene per ore consumo minimo.

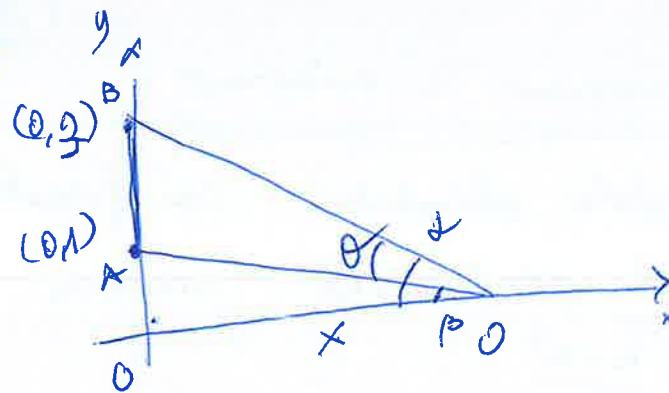
$$f(v) = \underbrace{(36 + 0,04v^2)}_{\text{(temp)}} t = (36 + 0,04v^2) \frac{2000 \text{ km}}{v} = \left(\frac{36}{v} + 0,04v \right) 2000$$

$$f'(v) = \left(-\frac{36}{v^2} + 0,04 \right) 2000 \geq 0 \quad -\frac{36}{v^2} + \frac{4}{100} \geq 0 \quad -\frac{9}{v^2} + \frac{1}{100} \geq 0$$

$$\Rightarrow v^2 \geq 900 \quad v \geq 30 \text{ km/h} \quad \frac{1}{100} \geq \frac{9}{v^2} \Rightarrow$$

$v = 30 \text{ km/h}$ se il minimo di consumo di carburante

3)



Ho considerato A-B
nelle posizioni (0,1) e (0,3)

Dove devo farmi sulla
orizzontale per avere l'angolo
massimo di visuale?

$$\tan \beta = \frac{1}{x} \quad \tan \alpha = \frac{3}{x} \quad \theta = \alpha - \beta$$

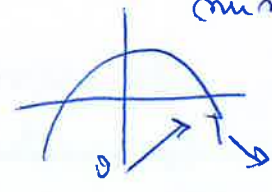
$$\tan \theta = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{3}{x} - \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x^2}} = \frac{\frac{2}{x}}{\frac{x^2+3}{x^2}} = \frac{2}{x} \cdot \frac{x^2}{x^2+3} = \frac{2x}{x^2+3}$$

$$\theta = \arctan \frac{2x}{x^2+3} \quad \theta' = \frac{1}{1 + \frac{4x^2}{(x^2+3)^2}} \cdot \frac{(x^2+3)^2 - 4x^2}{(x^2+3)^2} =$$

$$= \frac{6 - 2x^2}{1 + \frac{4x^2}{(x^2+3)^2}} \cdot \frac{(x^2+3)^2}{(x^2+3)^2}$$

Il D è sempre positivo quindi
 $\theta' > 0$ e individuato solo dal
numeratore!

$$6 - 2x^2 \geq 0$$



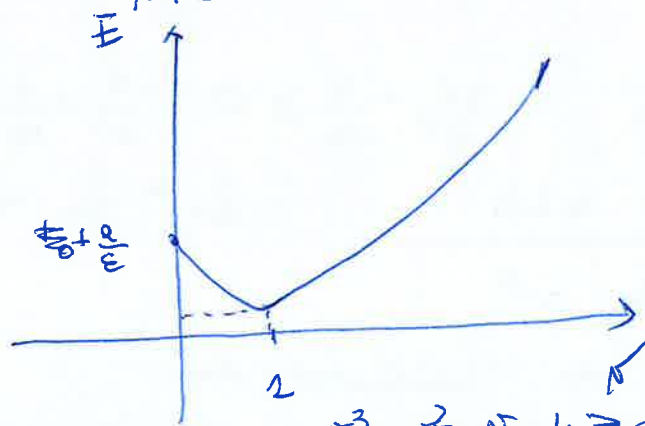
$$x \leq \sqrt{3} \quad \text{in } x = \sqrt{3}$$

for un massimo θ !

4) Studi dimostriamo
consumo in funzione

de l'energia... di
della velocità segue la legge
E₀ energia di metabolismo basale
a, e, b costanti individuali

$$E = \frac{a}{v + e} + b v^2 + E_0$$



per $v=0 \quad E = \frac{a}{e} + E_0$

$\lim_{v \rightarrow \infty} E = +\infty$

$$E' = -\frac{a}{(v+e)^2} + 2bv \geq 0$$

Supp. che
 $e \geq 1 \quad \frac{a}{eb} = 4$

$$2bv(v+e)^2 \geq a$$

$$\sqrt{(v+e)^2 v} \geq \frac{a}{2b}$$

$$\frac{a}{2b} = 4 \quad e \geq 1$$

$v \geq 1$ minimo! $v^3 + v^2 + v - 4 \geq 0$ e sd. $v=1$



Problemi isoperimetrici

16

Tra tutte le curve chiuse di dato perimetro, qual'è quella che racchiude l'area massima?
 È un problema con vincolo che è la lunghezza finita del perimetro l :

$$l = \int \sqrt{1+(y')^2} dx \quad Area = \int y dx$$

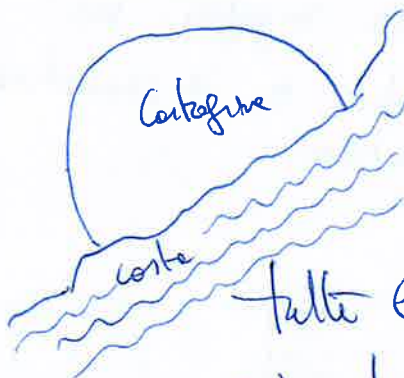
Si costruisce il funzionale $J(y) = \int (y + \lambda \sqrt{1+(y')^2}) dx$

il moltiplicatore di Lagrange

Si applicano le equazioni di Eulero-Lagrange e si trova che tale curva è la circonferenza

(si trova che deve essere $\frac{x}{\lambda} + c = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$ ~~da risolvere la eq.~~)
È di fatto il problema di Dido

Dido fugge da Tiro e approda in Africa. Il re locale le dà come territorio sei cui costruisce un fazzoletto di bue. Lei ne taglia soltanto mezza e l'area tra la costa e la terra ferma va spartita su cui costruisce Cartagine. Tale Area $\rightarrow$ essere massima deve essere una semicirconferenza!



in generale
 $l = 2\pi r$

$$r = \frac{l}{2\pi}$$

$$A = \pi r^2$$

$$\downarrow \frac{l^2}{4\pi}$$

area massima!

tutte le altre curve forniscono una area minore!

Gesamtsche

(14)

Le geodesiche sono curve che rappresentano il percorso più breve tra due punti

- 1) Nel piano euclideo : rette
- 2) Sulla superficie di una sfera : archi di cerchi massimi
- 3) Nelle relatività generale : moto dei corpi e della luce nello spaziotempo "curvo"

Le geodesiche sono percorse da un oggetto lasciato libero (senza forze esterne) e le percorre "naturalmente"

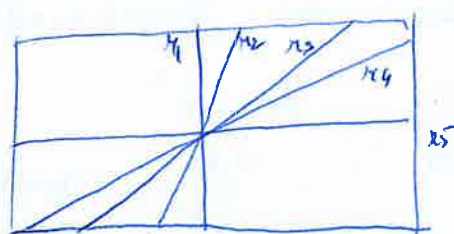
1a) Si può utilizzare il calcolo delle variazioni e le equazioni di Eulero-Lagrange ottenendo che $\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = c$

da cui risolvendo $\frac{dy}{dx} = c \rightarrow dy = c dx$ integrando

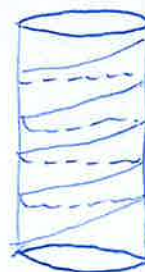
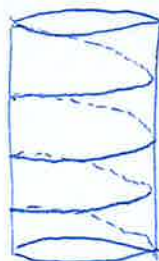
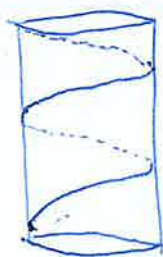
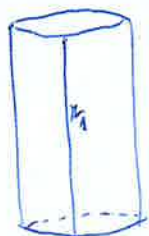
$y = cx + b$ rette!!!

2b) Geodesiche su di un cilindro circolare retto

geodesiche su una superficie piana:



sviluppendo tale superficie si ottiene un cilindro $x_1 \rightarrow$ generatrice
 x_5 cerchi $\perp$ generatrice
 x_2, x_3, x_4 Eliche



Geodetiche su superficie sferica

Se lunghezza di una curva nello spazio, analogamente al piano

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \Rightarrow ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad \begin{matrix} dx = \dot{x} dt \\ dy = \dot{y} dt \\ dz = \dot{z} dt \end{matrix}$$

$$\Rightarrow ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt \Rightarrow L = \int ds$$

ds elemento infinitesimo

$$\Rightarrow L = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

superficie della sfera su cui sta la geodetica
 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ R raggio sfera.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)$$

P. variazionale con moltiplicatore di Lagrange λ

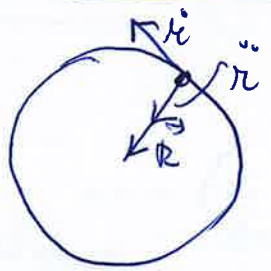
$$J = \int \left\{ \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{\lambda}{2} (x^2 + y^2 + z^2 - R^2) \right\} ds$$

$\frac{1}{2}$ e togliere la radice non cambiano dove il risultato
 $L = \left[\begin{matrix} * \\ 1 \end{matrix} \right]$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \quad (*)_2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$$\ddot{x} = \lambda x \quad \ddot{y} = \lambda y \quad \ddot{z} = \lambda z \Rightarrow \ddot{r} = \lambda r \quad \text{acc. tang. a } r$$

cerchi massimi le curve massime sulle sfere



$$\text{infatti } a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 R$$

acc. tang. al raggio

i meridiani sono cerchi massimi
come l'equatore



le geodetiche tra due punti A, B
sono archi dei cerchi massimi

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \ddot{x} - \lambda x = 0 \quad \ddot{x} = \lambda x$$

Geodiche su superficie iperbolica

(19)

Consideriamo il piano di Poincaré la cui metrica è

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \quad L = \int \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{y} dt \quad \text{lagrangiana} \quad y > 0$$

$$L_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2} \quad \text{eq. di Eulero-Lagrange}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 ; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{y^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{1}{2} \frac{2\dot{y}}{y^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = - \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{y^3}$$

$$1) \boxed{\dot{x} = c y^2}$$

Le equazioni in canonica rappresentano le geodiche nel piano di Poincaré *

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{y}}{y^2} \right) + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^3} = 0$$

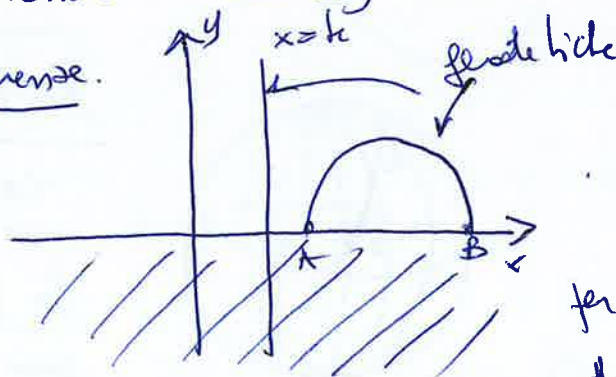
facendo i cambi

$$\Rightarrow \boxed{y \ddot{y} - \dot{y}^2 + \dot{x}^2 = 0}$$

dalla 1) se $c=0$ $\dot{x}=0$ $x=\text{cost.}$ rette verticali. (tip. di geodiche) rette verticali

$$2) \text{ se } c \neq 0 \quad y \ddot{y} - \dot{y}^2 + c \dot{y}^2 = 0$$

In questi casi risolvendo la 2) ---
si ottengono semicirconferenze.



Il bordo
A B
non è
incluso
per $y \rightarrow 0$
 $ds \rightarrow \infty$

Geodesiche in comp. gravitazionale

(20)

Q. fronte di onde attorno al Sole segue una geodesica dello spaziotempo curvato dalla massa del Sole.
Un astronauta in caduta libera verso la Terra segue una geodesica, anche di ferro.

⇒ Percorso più "naturale" o di minime distanze nello spaziotempo curvo, se non agiscono altre forze!

Eqs. geodesiche

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

τ tempo proprio
 x^μ coordinate

$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$

Simboli di Christoffel esprimono la curvatura dello spaziotempo!

Se la curvatura è nulla (spaziotempo di Minkowski della relatività ristretta)

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0$$

N costanti
 $\alpha \cdot \cdot = 0$

⇒ rette nello spaziotempo

meccanica classica

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = 0$$

— • — • —

ottimizzazione in economia, logistica, trasporti.

(21)

Economia

Scegliere la migliore decisione possibile nel rispetto dei vincoli esistenti con l'obiettivo di massimizzare un beneficio (utilità, profitto, benessere) o minimizzare un costo

Logistica e Trasporti

Come sapere gestire movimento e la disponibilità di merci, fornire e ricevere, riducendo costi migliorando il servizio. Qual'è il modo più conveniente per spostare ciò che serve, dove serve e quando serve?

Ricerca operativa

3 Problemi

1) Massimizzare un profitto

- Un laboratorio produce oggetti: A e B
- Ogni oggetto A da un utile di x
- " " B " " di y
- tempo di lavorazione: $1h \times A$
 $2h \times B$
- 8 ore di lavoro al giorno.
- la disponibilità di materiale è di 3 pezzi $\times A$
" " 1 " $\times B$
- per un totale di 9 unità (pezzi) al giorno di materiale
- $x \geq 0$ $y \geq 0$

massimizzare il profitto giornaliero

$$Z = 3x + 5y$$

Vincoli

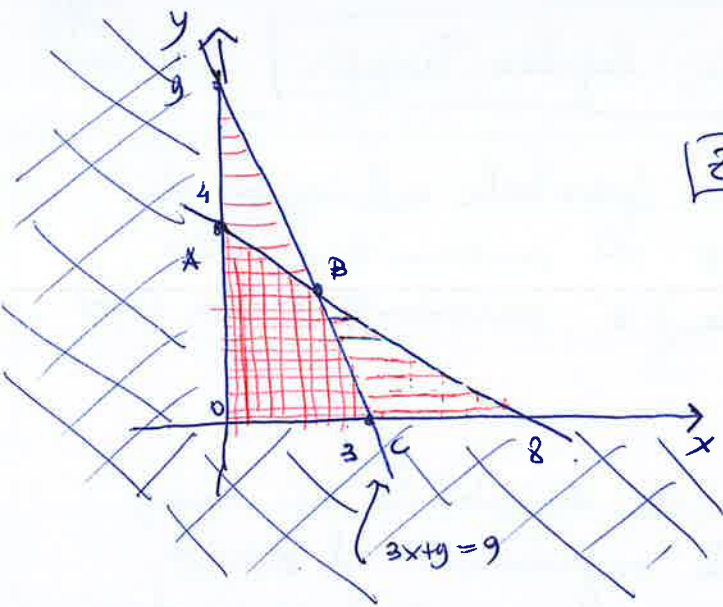
tempo

$$x + 2y \leq 8$$

materiali

$$3x + y \leq 9$$

$\Rightarrow$



$$x \geq 0 \\ y \geq 0$$

Disegnare la rete:
vincoli

$$z = 3x + 5y$$

$$B \begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x + y = 9 \end{cases} \quad \begin{matrix} x + 2y = 8 \\ 3x + y = 9 \end{matrix}$$

$$A(0,4) \quad B(2,3) \\ C(3,0)$$

Le zone che interessano è quella compresa nei vincoli.

La teoria dice che il massimo si trova al vertice z nei vertici A, B, C

$$z(0,4) = 20 \quad z(3,0) = 9 \quad z(2,3) = 21$$

so che il profitto massimo per $A=2$ e $B=3$ al giorno

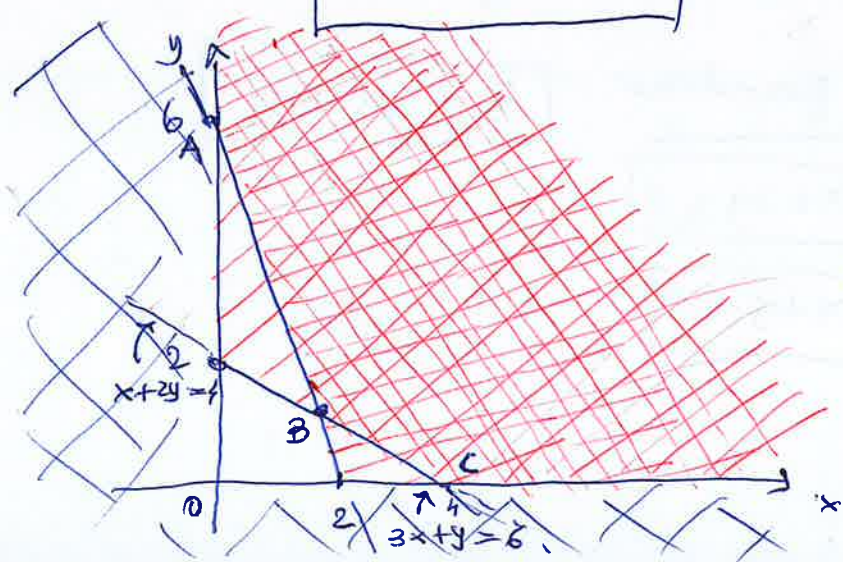
2) Ricerca di minimo spese per dieta zootecnica

Due tipi di mangimi A e B

x : A costa 2€ al kg : 3 unità di vitamine + 1 proteine
 y : B " 3€ " 1 " vitamine + 2 proteine
 le razioni devono contenere almeno 6 unità vitamine e 4 " proteine

Costo: $z = 2x + 3y$

vincoli $\begin{cases} 3x + y \geq 6 \\ x + 2y \geq 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$



$$A(0,6) \quad C(4,0)$$

$$B\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

$$z(0,6) = 18 \quad z(4,0) = 8$$

$$z\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right) = 6.8 \text{ valore minimo!}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{5} \text{ di } A \quad \frac{6}{5} \text{ di } B$$

3)

Consegna merci, costo minimo

23

Camion A (t) porta 10t 500 € al giorno

" B (t) " 5t 300 €

⇒ trasporto almeno 100 t al giorno
con un massimo di 15 autisti4 x, y
autisti che
guidano le
Camion A e Bogni autista guida
la A o la B.

Costo: $z = 500x + 300y$

vincoli:

$10x + 5y \geq 100$

$x + y \leq 15$

$x, y \geq 0$

capacità trasporto
autisti.

A (0,15) B (15,0)

C (5,10)

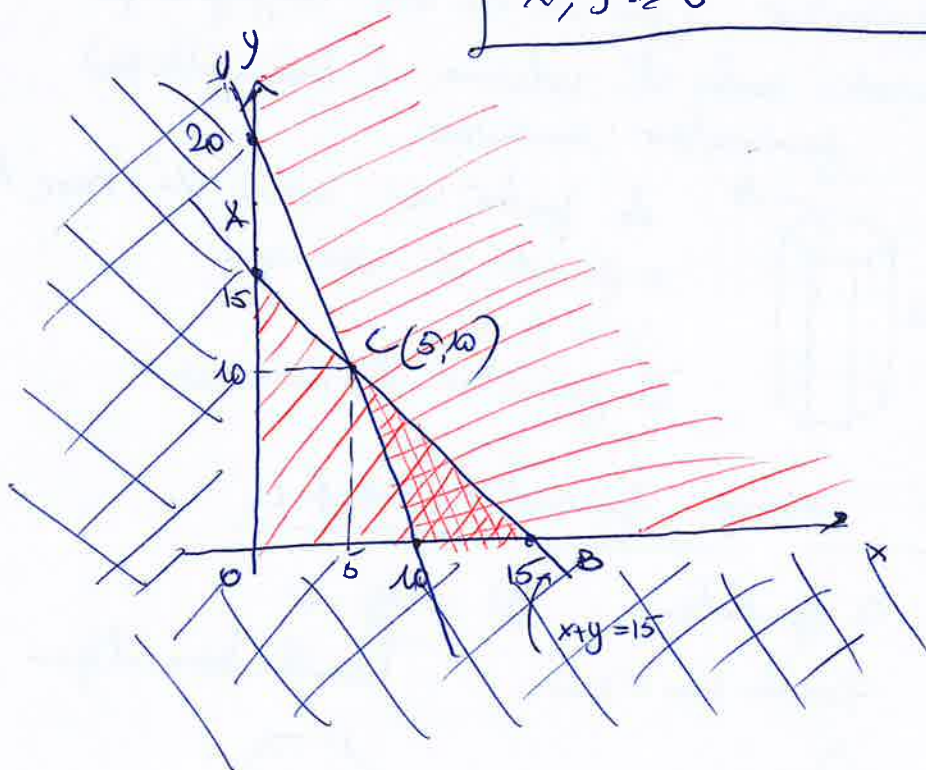
$z(15,0) = 7500 \text{ €}$

$z(5,10) = 5500 \text{ €}$

$z(10,0) = 5000 \text{ €}$

⇒ 10 autisti che
condurranno le
Camion A

⇒ costo minimo



Ottimizzazione in natura

Processo evolutivo attraverso il quale gli organismi raggiungono la massima efficienza strutturale, energetica e funzionale con la minima spesa di risorse.

- Alcuni esempi:
- celle esagonali alveari
 - ramificazione degli alberi per trasporto linfe
 - resinose geometriche conduttrici, orecchie degli uccelli.

1) Celle esagonali alveari

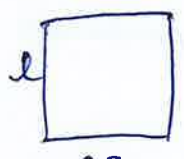
Il fero è costituito da strutture che sono frusmi esagonali i quali tenono bene il peso e a parte di Area riducono il perimetro (quindi la area impiegata per la costruzione); quindi anche il volume ($b \times a \times altezza$) risulta inferiore al perimetro minimo.



A parte di area di base A e quindi di volume
 $V = A \cdot h$
il perimetro è minimo.

Dimostrando con alcuni esempi geometrici semplici

1) quadrato
tenella bene il peso



una dimensione

$A = l^2$

Supp. di $A = 100 \text{ m}^2$
 $l = 10 \text{ m}$

$P_1 = 4l = 40 \text{ m}$

Ed è cerchio?

$\pi r^2 = 100$

$r^2 = \frac{100}{\pi} \Rightarrow r = \frac{10}{\sqrt{\pi}}$

$2\pi r = 2\pi \frac{10}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow 20 \sqrt{\pi} \approx 35.7$
ma non tenella il peso!

2) triangolo equilatero
tenella bene il peso



$A = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$

$a^2 = \frac{4 \cdot 100}{\sqrt{3}}$

$a = \frac{20}{\sqrt[4]{3}}$

$P_2 = \frac{60}{\sqrt[4]{3}} = 45.6 \text{ m}$

3) esagono
tenella bene il peso



$A = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$

$a^2 = \frac{2 \cdot 100}{\sqrt{3}}$

$a = \frac{10 \sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$

$P_3 = 6a = \frac{60 \sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}} = 37.0 \text{ m}$

Sistemi biologici di trasporto (sangue, linfe)

25

Legge di Murray

Il cubo del raggio di un vaso principale è uguale alle somme dei cubi dei raggi dei vasi ramificati che da esso

$$\boxed{R_0^3 = R_1^3 + R_2^3} \quad \text{in generale} \quad \boxed{R_0^3 = \sum_{i=1}^n R_i^3}$$

Si ottiene attraverso un metodo di ottimizzazione empirica minimizzando l'energia spesa per pompare il fluido (sangue) e quella per mantenere il fluido nei vasi (reimpimento vasi)

1) P_m potenza metabolica (mantenimento fluido nei vasi) è proporzionale al volume del vaso.

2) P_f potenza idraulica energia spesa per vincere la resistenza all'avanzamento del fluido (attrito viscoso)

1) $\boxed{P_m = m \pi r^2 l}$ m costante.

2) legge di Poiseuille

potenza dissipata $P_f = \Delta p Q$

$$\Delta p = \frac{8 \mu l Q}{\pi r^4} \quad (\text{legge di Poiseuille})$$

Δp diff. di pressione

Q portata $Q = \frac{V}{t} = S \cdot v$

$$P_f \Rightarrow \frac{F}{S} \cdot S \cdot v = F \cdot v \text{ potenza}$$

μ viscosità

$$\boxed{P_{tot} = P_m + P_f = m \pi r^2 l + \frac{8 \mu l Q^2}{\pi r^4}}$$

Derivando rispetto ad r

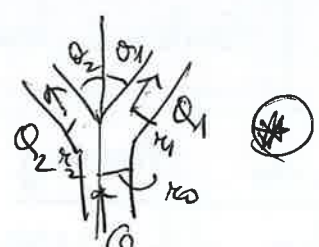
$$\frac{dP}{dr} = 2m\pi r l - \frac{32\mu l Q^2}{\pi r^5} = 0$$

$$\Rightarrow Q^2 = \frac{m\pi^2}{16\mu} r^6$$

$$Q = \left(\sqrt{\frac{m\pi}{\mu} \cdot \frac{\pi}{4}} \right) r^3$$

$$\boxed{Q = k r^3}$$

Applicazione alla rifrazione



per la conservazione della massa

$$Q_0 = Q_1 + Q_2 \quad n_0^3 = n_1^3 + n_2^3$$

$$\Rightarrow \boxed{n_0^3 = n_1^3 + n_2^3}$$

$$\Rightarrow n_2 < n_0$$

Legge di Snell *

$$\boxed{\cos \theta_1 = \frac{n_0^4 + n_1^4 - n_2^4}{2 n_0^2 n_1^2}}$$

$$\boxed{\cos \theta_2 = \frac{n_0^4 + n_2^4 - n_1^4}{2 n_0^2 n_2^2}}$$

con particolari 1) Bifurcazione simmetrica $n_1 = n_2 = n$

$$\cos \theta = \frac{n_0^4}{2 n^4} = \frac{n_0^2}{2 n^2}$$

$$n_0^3 = 2n^3 \quad n_0 = n\sqrt[3]{2}$$

$$n_0^2 = n^2\sqrt[3]{4}$$

$$\cos \theta = \frac{n^2\sqrt[3]{4}}{2n^2} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} \approx 0,79$$

$$\theta = \arccos(0,79) \approx 37,8^\circ$$

2) limiti: raggio grande, angoli piccoli

Anche se un raggio è grande, l'angolo sarà piccolo in quanto l'altro sarà piccolo e il raggio tenderà ad n_0 mentre $n_2 \rightarrow 0$

$$\lim_{\substack{n_1 \rightarrow n_0 \\ n_2 \rightarrow 0}} \cos \theta = \frac{n_0^4}{2 n_0^2 n_0^2} + \frac{n_1^4}{2 n_0^2 n_1^2} - \frac{n_2^4}{2 n_0^2 n_2^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \cos \theta = 1 \Rightarrow \theta = 0!$$

il limite è zero ma n_2 non sarà mai 0 come n_1 non sarà mai n_0 !
 allora $n_1 = \frac{3}{4} n_0 \quad \theta \approx 27^\circ$

3) limiti: raggio piccolo, angoli grandi ($\theta \approx 60^\circ - 80^\circ$) ngchiu vari ateroscleroti, flocche Arterioscleroti nei vasi sanguigni

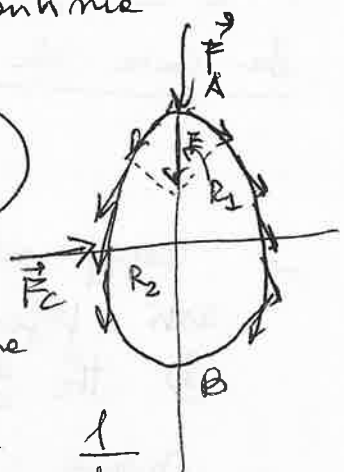
$$\lim_{\substack{n_2 \rightarrow n_0 \\ n_1 \rightarrow 0}} \cos \theta = \frac{n_0^2}{2 n_1^2} + \phi - \frac{n_0^4}{2 n_1^2 n_0^2} = \frac{n_0^2}{2 n_1^2} - \frac{n_0^2}{2 n_1^2} = 0$$

$\cos \theta = 0 \rightarrow \theta = 90^\circ$
è un punto al limite!

Guscio uovo

Il guscio d'uovo ottimizza la resistenza forte alle sue forme e cupola che distribuisce il peso su tutta la superficie. Gli elementi importanti sono:

- 1) Curvatura diverse sulle superficie ma continue
- 2) Distribuzione delle fessure
- 3) Lavoro in compressione (il colmo è molto forte)
- 4) Rappresenta di materiale, spesso sottile
- 5) grande stabilità sul peso delle galline che covano.
- 6) in (A) R_1 raggio piccolo $\rightarrow$ curvatura elevata $\frac{1}{R_1}$
in (B) $R_2 > R_1 \rightarrow$ curvatura più bassa



7) Debolente alla trazione, forse di taglio lungo l'equatore. La dinamica è tutta nell'espansione di sflocc.

$$\frac{\sigma_\theta}{R_1} + \frac{\sigma_\phi}{R_2} = \frac{p}{t}$$

σ_θ tensione verticale // all' meridiano
 σ_ϕ " orizzontale

p pressione, t spessore ($\approx 0,3 \text{ mm} \times$ uovo)

R_1 e R_2 raggi di curvatura su piani perpendicolari

l'uovo ha una notevole efficienza F_{eff} . galline

$$F_{eff} = \frac{\text{Carico di rottura } (F_{max})}{\text{masse gusci}} \approx \frac{25-30 \text{ kg}}{0,6 \text{ g}} \rightarrow$$

regge 5000 volte il proprio peso (guscio)

massa uovo 50,60 g. $\rightarrow$ regge 500 volte il peso totale

La superficie approssimata può essere calcolata con le relazioni

$$S \approx 2\pi b^2 + 2\pi \frac{ab}{e} \arcsin e \quad e_{eccentricità} = \sqrt{1 - b^2/a^2}$$

Il volume sarà $V = S \cdot t$ t spessore $\approx 0,3 \text{ mm}$

$a \approx 2,75 \text{ cm} - 3 \text{ cm}$ $b \approx 2,2 - 2,3 \text{ cm}$.

Se curve che lo può rappresentare: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2 \frac{1}{(1+ex)^2}} = 1$
 $e \approx 0,2; 0,3$

- Esempi celebri: 1) cupole Brunelleschi, 2) Centro nazionale arti performative (Sechin) cupole ellittica in titanio e vetro (L'Uovo)
 3) The Gherkin, Londra, 4) The Bad Obervortburg, (Paesi Bassi)
 < Nature: ricci di mare, gusci fusti e noa', cavi marmiferi

