MATEMATICA,FISICA E REALTA'

Il corso si propone di mettere il luce come la matematica trovi ampia applicazione non solo nelle discipline scientifiche universalmente note come la fisica ma possa essere di estrema utilità se applicata anche ad altre realta',attraverso modelli matematici di valore non solo descrittivo ma anche predittivo.

- Di tanto in tanto ,probabilmente all'inizio di ogni successivo incontro il sottoscritto produrrà un documento descrittivo della lezione,cartaceo o altro, che sarà distribuito ai partecipanti.
- Passo ora a descrivere il percorso previsto.

DESCRIZIONE GENERALE

- Il corso ritengo possa avere una durata quadrimestrale ,16 ore, 16 incontri. Ovviamente il numero di ore è tale da poter dare un quadro generale del problema,senza entrare troppo nel particolare. Durata di ogni incontro : 1 ora
- Il corso ,per evidenti ragioni di competenze di base, è consigliato a coloro che abbiano seguito un corso di studi di scuola secondaria superiore. Ovviamente tutti coloro che si ritengono interessati all' argomento sono ben accetti.

a) L'uso della matematica di base in fisica 3 ore

Si analizza come alcuni elementi basilari della matematica come le equazioni, il calcolo letterale, la geometria analitica (rette,parabole,iperboli) siano non solo utili ma necessari per la descrizione di argomenti fondamentali in fisica quali il moto,la statica ,la dinamica ,la termologia.

b) Una fondamentale scoperta per la scienza occidentale moderna: le derivate 2 ore

- Verrà definito il concetto di derivata e si calcoleranno alcune semplici derivate di funzioni elementari.
- Verranno inoltre esposti alcune applicazioni di base delle derivate che riguarderanno la matematica in se,la fisica ed altri ambiti scientifici.

c) Le equazioni differenziali ed il loro utilizzo 2 ore

Verranno presentate alcune semplici equazioni differenziali nell'ambito della fisica e di alcuni aspetti biologici. Non verrà affrontata la risoluzione delle stesse in quanto ciò implica l'uso del calcolo integrale, argomento che non può essere affrontato in corsi di questo tipo. A richiesta si potrà affrontare tale argomento in casi molto semplici.

d) Determinismo e caos. 2 ore

- Verranno presentati alcuni esempi di equazioni differenziali non lineari applicate al mondo biologico. Equazioni di Lotka-Volterra. Sistema SIR ed analoghi e relativi modelli matematici. Eventuale elaborazione al computer di tali equazioni. Passaggio al caos. Esempi.

e) La geometria frattale. 2 ore

- Si tratterà del concetto di dimensione in geometria. Il logaritmo. Attraverso alcuni esempi si introdurrà la dimensione frazionaria ed i frattali. Eventuale elaborazione al computer.

f) La teoria della relatività, quale matematica? 2 ore

- Relatività ristretta e relativi postulati. Significato matematico e fisico delle trasformazioni di Lorentz.
- Le geometrie non euclidee e la curvatura dello spazio-tempo. Relatività generale (cenni.)

g) Come descrivere gli eventi ed il reale attraverso la teoria delle probabilità e la statistica. 3 ore

- Verrà introdotto il concetto di probabilità ed attraverso numerosi esempi verranno calcolate le relative probabilità senza far uso dei teoremi.
- Verrà introdotto il concetto di statistica descrittiva e dei relativi indici che la caratterizzano sempre attraverso numerosi esempi.

1

a) IL MOTO

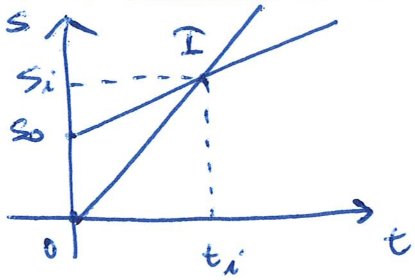
a1) Il sorpasso

Due automobili (considerate puntiformi) si muovono lungo una strada rettilinea di moto rettilineo uniforme, cioè con velocità costante ma diverse

- equazioni del moto.

$$s_1 = v_1 t$$
$$s_2 = s_0 + v_2 t \qquad v_1 > v_2$$

rappresentazione grafica:



Il punto I (t_i, s_i) sarà quello del sorpasso!
Come si calcola?
Sistema di equazioni $\begin{cases} s_1 = v_1 t \\ s_2 = s_0 + v_2 t \end{cases}$

$\Rightarrow$ in I $s_1 = s_2 = s_i \Rightarrow$ $v_1 t = s_0 + v_2 t$

$$v_1 t - v_2 t = s_0$$
$$t(v_1 - v_2) = s_0 \qquad t_i = \frac{s_0}{v_1 - v_2} \qquad s_i = v_1 \frac{s_0}{v_1 - v_2}$$

Esempi numerici

$s_0 = 100\,m$ $\qquad v_1 = 30\,m/s \simeq 30 \cdot 3{,}6\,km/h \simeq 108\,km/h$ $\qquad v_2 = 20\,m/s \simeq 20 \cdot 3{,}6\,km/h \simeq 72\,km/h$

$$t_i = \frac{100}{30-20} = \frac{100}{10} = 10\,s. \qquad s_i = \frac{30 \cdot 100}{10} = 300\,m.$$

N.B. se $v_1 = v_2$ (rette parallele) o $v_1 < v_2$ (rette divergenti) $\Rightarrow$ non si incontrano

Esempio **Achille e la tartaruga** (paradosso di Zenone)

$v_A = 10\,m/s \qquad v_T = 1\,m/s \qquad s_0 = 10\,m$

Secondo Zenone Achille non raggiunge la tartaruga!

in realtà $s_A = 10t \qquad s_T = 10 + t$ equazioni del moto

come sopra $s_A = s_T \qquad 10t = 10 + t \qquad 9t = 10 \qquad t = \frac{10}{9} \simeq 1{,}1\,s$

$s = 10 \cdot 1{,}1 = 11\,m$. Da dove il paradosso?

$\Rightarrow$

Spiegazione:

$t_1 = 1\,s$ $\quad s_T = 1\,m$ $\quad s_A = 10\,m$

$t_2 = 0{,}1\,s$ $\quad s_T = 0{,}1\,m$ $\quad s_A = 1\,m$

$t_3 = 0{,}01\,s$ $\quad s_T = 0{,}01\,m$ $\quad s_A = 0{,}1\,m$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

nel tempo di 1 s Achille percorre 10 m la Tartaruga percorre 1 m
Achille percorre 1 m in 0,1 s e la tartaruga in 0,1 s percorre 0,1 m
" " 0,1 m in 0,01 s " " 0,01 s " 0,01 m
e così avanti.

Il tempo per raggiungere la Tartaruga è
$t = t_1 + t_2 + t_3 + \dots$ somma di ∞ termini che per Zenone è ∞ $\Rightarrow$ Achille non può raggiungere la Tartaruga!

Invece $t_1 + t_2 + t_3 + \dots t_n = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots + \left(\frac{1}{10}\right)^n =$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{10}} \qquad t = \lim_{t \to \infty} \frac{10}{9}\left(1 - \frac{1}{10^{n+1}}\right) = \frac{10}{9} \simeq 1{,}1\,s.$$

Somma di una serie geometrica! $1 + a + a^2 + \dots a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$

Dimostrazione

$S = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$

$aS = a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n+1}$ sottraggo la 1ª dalla 2ª

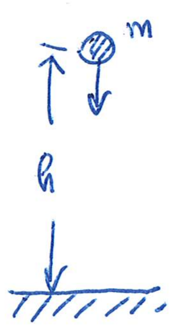
$\rightarrow aS - S = \cancel{a} + \cancel{a^2} + \cancel{a^3} + \dots + a^{n+1} - 1 - \cancel{a} - \cancel{a^2} - \dots - \cancel{a^n}$

$\Rightarrow S(a-1) = a^{n+1} - 1 \qquad S = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$ c.v.d.

a2) Caduta di un grave

Moto rettilineo uniformemente accelerato

l'accelerazione è quella di gravità $g = 9{,}81\,m/s^2$



- equazione del moto $h = \frac{1}{2} g t^2$ (*)

il tempo di caduta è, considerando nullo l'attrito dell'aria $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

esempio $h = 10\,m$

$$t = \sqrt{\frac{20}{9{,}81}} \simeq \sqrt{2} = 1{,}41\dots s$$

(*) la legge del moto nella letteratura è $s = \frac{1}{2} g t^2$

Spazio di frenata

Una automobile viaggia ad una velocità costante v_0, frena e si ferma: Quanto spazio percorre? In quanto tempo?

Leggi del moto: $\begin{cases} v = v_0 - at \\ s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$ (acc. negativa in frenata)

Se si ferma $v = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{a}$

$$s = v_0 \frac{v_0}{a} - \frac{1}{2} a \frac{v_0^2}{a^2} = \frac{v_0^2}{a} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a}$$

Esempio numerico

$v_0 = 108 \text{ km/h} = 30 \text{ m/s}$

$a = 3 \text{ m/s}^2$

$t = \frac{30 \text{ m/s}}{3 \text{ m/s}^2} = 10 \text{ s}.$

$$s = \frac{1}{2}\frac{30^2}{3} = \frac{1}{2}\frac{900}{3} = \frac{300}{2} = 150 \text{ m}$$

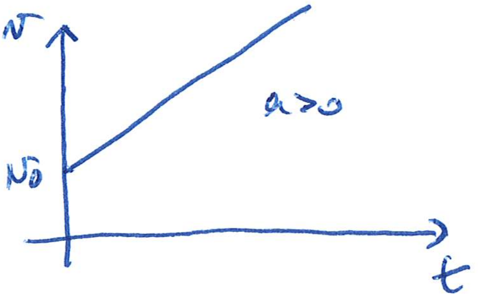
Grafici del moto rettilineo uniformemente accelerato

equazioni orarie

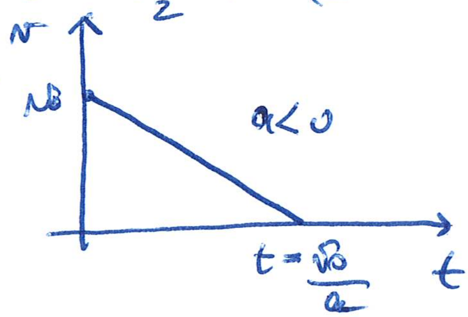
1) $v = v_0 + at$ $\qquad a = \frac{v - v_0}{t}$

2) $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ (*)

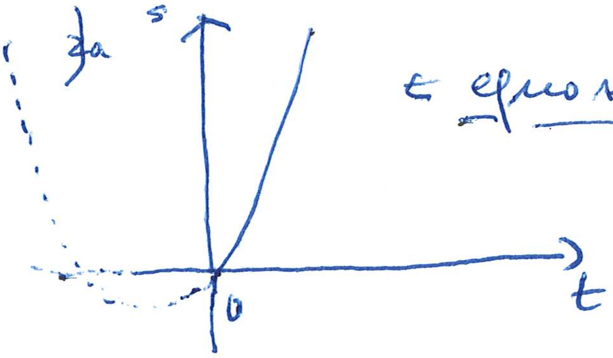
1)a



1)b



2)a

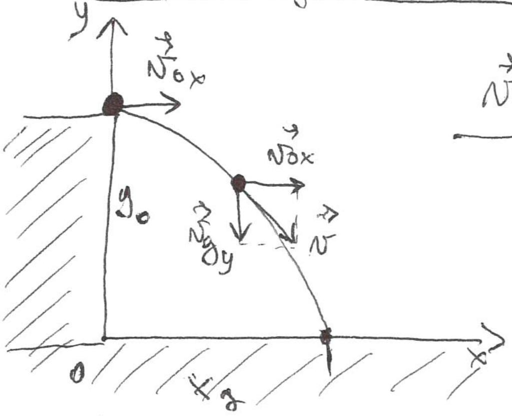


è equazione della parabola (*)

2 bis

4

Caduta di un grave con velocità iniziale (moto Parabolico semplice)



$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_g$ tangente alla traiettoria.

equaz. del moto, composizione del moto. (lungo x e lungo y)

$$\begin{cases} x = v_{0x} \cdot t & \text{(moto R.U)} \\ y = y_0 - \frac{1}{2} g t^2 & \text{(moto RUA)} \end{cases}$$

$t = \dfrac{x}{v_{0x}}$

$$\boxed{y = y_0 - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{0x}^2}}$$ parabola.

y è negativo nella formula perché cala la quota nella caduta.

quando $y=0$ tocca terra!

$$y_0 = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{0x}^2}$$

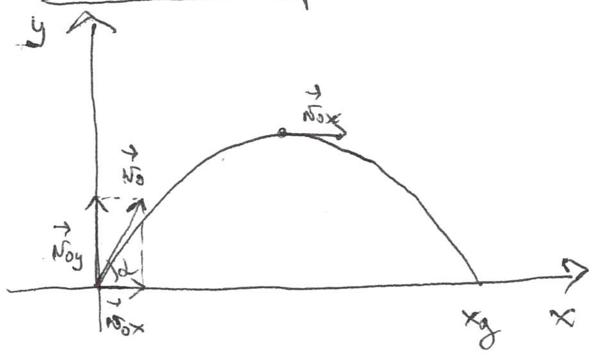
$$x^2 = \frac{2 v_{0x}^2 \cdot y_0}{g}$$

$$\boxed{x_g = v_{0x} \sqrt{\frac{2 y_0}{g}}}$$

gittata!

— o — o —

Moto parabolico



x_g gittata. (Salto in lungo, mortaio, proiettile ----)

La velocità $\vec{v}_0$ si scompone in una velocità orizzontale $\vec{v}_{0x}$ ed una verticale $\vec{v}_{0y}$

$$\begin{cases} x = v_{0x} t \\ y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{x}{v_{0x}}$$

$$y = v_{0y} \frac{x}{v_{0x}} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{0x}^2}$$

dato che $\dfrac{v_{0y}}{v_{0x}} = tg\alpha$, $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, $tg\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}$

$$y = x\, tg\alpha - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}$$

la gittata si ha $y=0$

$\Rightarrow x_g$: $\cancel{x}\, tg\alpha = \frac{1}{2} g \frac{x^{\cancel{2}}}{v_0^2 \cos^2\alpha}$

$$x = \frac{2 v_0^2 \cos^2\alpha\, tg\alpha}{g} = \frac{2 v_0^2 \cos^2\alpha \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}}{g}$$

$$\boxed{x_G = \frac{2 v_0^2 \cos\alpha\, sen\alpha}{g}} = \frac{v_0^2\, sen\, 2\alpha}{g}$$

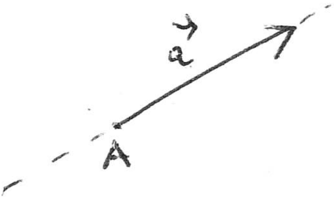
x_g max per $\alpha = 45° \Leftrightarrow 2\alpha = 90°$

b) I VETTORI

<u>I vettori</u> sono grandezze geometriche che trovano ampio utilizzo nella fisica.
Essi hanno bisogno di 3 elementi per essere definiti: 1) direzione 2) verso 3) intensità

1) è la retta su cui agiscono 2) il verso su tale retta
3) Il valore numerico con unità di misura.

Il vettore si rappresenta con una freccia



la retta dove giace la freccia è la direzione, il verso è dato dalla punta della freccia e l'intensità dalla lunghezza della freccia.

<u>Esempi</u>: <u>Le forze</u> sono <u>dei vettori</u>, come lo sono anche la velocità, l'accelerazione ed altre grandezze fisiche.

Gli <u>SCALARI</u> sono grandezze fisiche che necessitano solo della loro intensità (valore numerico) ed unità di misura.

<u>Esempi</u>: Il tempo, la massa, la temperatura ed altre grandezze fisiche.

Se una grandezza è un vettore si indica con il simbolo $\vec{F}$, se scrivo F considero solo la parte scalare

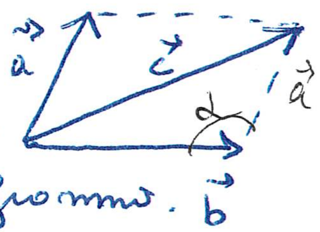
<u>N.B.</u> I vettori <u>si sommano, si sottraggono, si moltiplicano tra di loro in modo differente rispetto agli scalari (cioè ai numeri)</u>

<u>Perché si utilizzano?</u> Perché descrivono la fisica correttamente, cosa che in certe circostanze gli scalari non riescono a fare!

=)

Somma di vettori

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

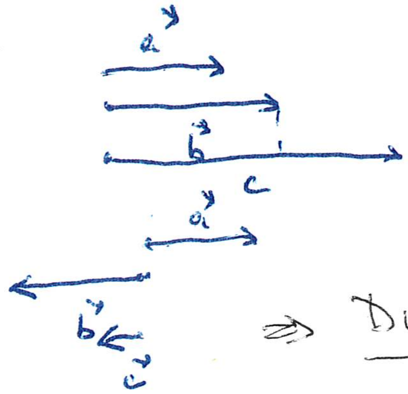


regola del parallelogramma.

N.B. $c \neq a+b$ in generale

$c = a+b$ solo quando i vettori sono paralleli e concordi o paralleli e discordi

Esempi



$c = a+b$

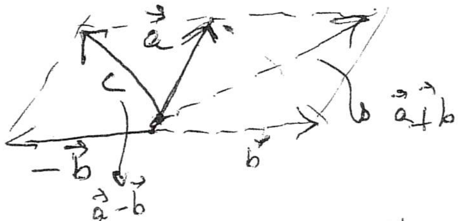
oppure

$c = a-b$

⇒ Differenze

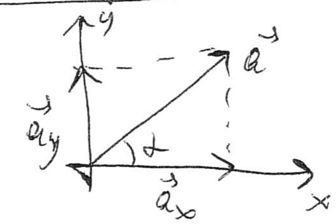
$\vec{a}-\vec{b}=c$

$\vec{a}+(-\vec{b})=c$



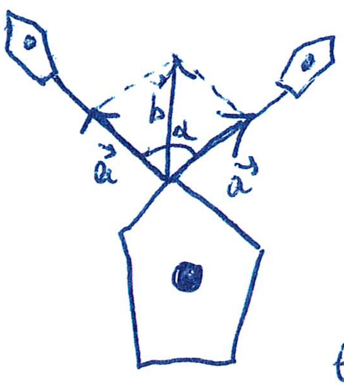
Traino di una nave

Scomposizione di un vettore



$a_x = a\cos\alpha$

$a_y = a\sin\alpha$



$\vec{b} = \vec{a} + \vec{a}$

Il calcolo di b è spesso complicato

Caso semplice l'angolo α è di 90°

⇒ Teor. di Pitagora, in generale teorema di Carnot.

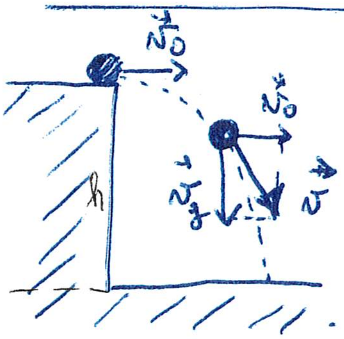
$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\alpha$

Esempi $a = 1500\ N$

$b = ?$

$$b=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2a^2}=a\sqrt{2}=1500\ N\cdot\sqrt{2}\simeq 2121\ N$$

Caduta di un grave con velocità iniziale



$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{v_g}$

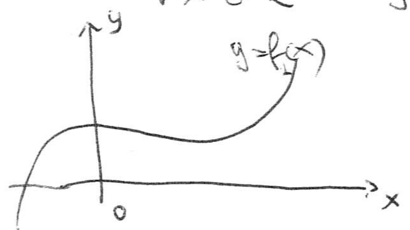
LE DERIVATE (Newton, Leibniz)

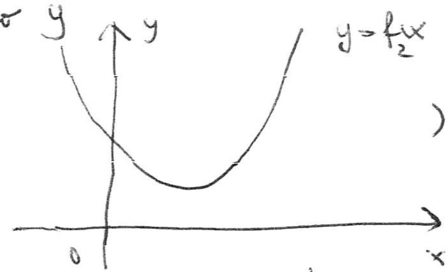
1684 Leibniz acta eruditorum — 1687 Newton ~~...~~ Principia mathematica philosophiae naturalis

a) Concetto di funzione (ovunque definita)

$y = f(x)$ $\forall x \in R$ $\exists$ 1 e 1 solo y

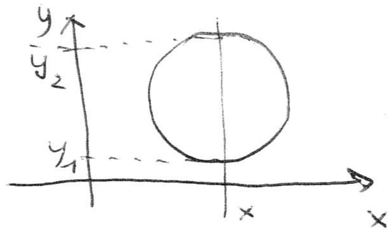
graficamente





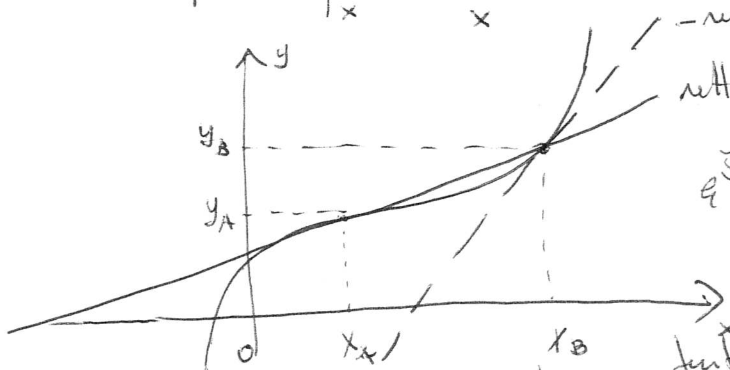
$f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono funzioni

Cenni sulla retta ed al fuoco in 1.



la cf. non è una funzione

fissato x ho due valori di y!



— retta tangente in B!

retta secante — tasso di crescita della y rispetto alla x in un punto; è la f. coeff. angolare della retta tg al grafico di $y = f(x)$ ~~in un~~ al variare di x ~~punto~~ sola. Calcolo in un punto x_B è il coeff. angolare della retta tg. in quel punto.

Def. di derivata in un punto $\lim_{x_A \to x_B} \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = f'(x)$

$f'(x)$ si scrive anche $\frac{dy}{dx}$ formalismo di Leibniz.

o $\ddot{y}$

Esempi.

$f(x) = x^n$ — $f'(x) = n\,x^{n-1}$

$f(x) = e^x$ — $f'(x) = e^x$

$f(x) = \ln x$ — $f'(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = \operatorname{sen} x$ — $f'(x) = \cos x$

$f(x) = \cos x$ — $f'(x) = -\operatorname{sen} x$

$f(x) = \sqrt{x}$ — $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

mi limito a questi!

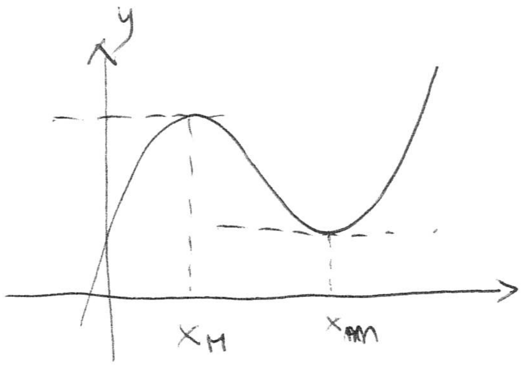
Applicazioni

velocità istantanea $\frac{dx}{dt}$

accelerazione " $\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ esempio ...

intensità di corrente $i = \frac{dq}{dt}$ ------

equazione fond. della dinamica : $F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x}$



il punto x_m è di minimo
" x_M " " massimo

in x_M e in x_m la derivata $\underline{y'=0}$!

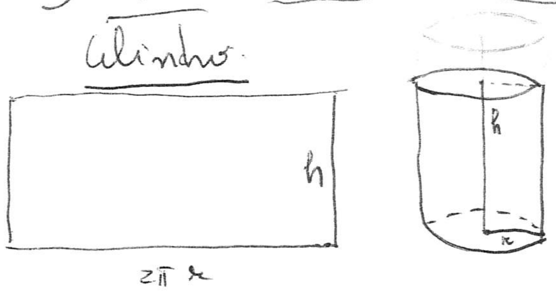
rette // all'asse x!

se $x < x_M$ la f. cresce $y' > 0$
$x > x_M$ " decresce $y' < 0$
se $x > x_m$ " cresce $y' > 0$
$x < x_m$ " decresce $y' < 0$

Problemi di massimo e minimo

1) Volume massimo di data superficie totale S costante

cilindro



$$V = \pi r^2 h$$
$$S = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r (h+r)$$

$$h = \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r} \qquad V = \frac{\pi r^2 (S - 2\pi r^2)}{2\pi r} = \frac{rS}{2} - \frac{2\pi r^3}{2} = \frac{r}{2}S - \pi r^3$$

$$V' = \frac{S}{2} - \frac{3\pi r^2}{2} \qquad V' = 0 \qquad \frac{S}{2} = \frac{3\pi r^2}{2} \qquad r^2 = \frac{S}{3\pi} \qquad r = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$$

$$\frac{S}{2} - \frac{3\pi r^2}{2} > 0 \qquad r < \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$$

$\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$ massimo

es. $S = 75\ cm^2$

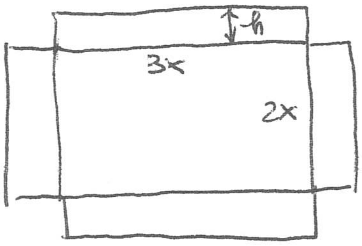
$$r = \sqrt{\frac{75}{3\pi}} = \sqrt{\frac{25}{\pi}} = \frac{5}{\sqrt{\pi}} \simeq 2{,}8\ cm$$

$2r = d = 5{,}6$ cm.

$$h = \frac{75 - \frac{2\pi\, 25}{\pi}}{2\pi \frac{5}{\sqrt{\pi}}} = \frac{75 - 50}{10\frac{\pi}{\sqrt{\pi}}} = \frac{25}{10\sqrt{\pi}} = \frac{5}{2\sqrt{\pi}} \simeq 1{,}4\ cm$$

2) Volume massimo di una scatola di data superficie (3)

$S_{tot} = 400\ cm^2$ (senza coperchio) perfetto. 9



$$S = 6x^2 + 2\cdot 3hx + 2\cdot 2hx$$
$$= 6x^2 + 6hx + 4hx = 6x^2 + 10hx$$

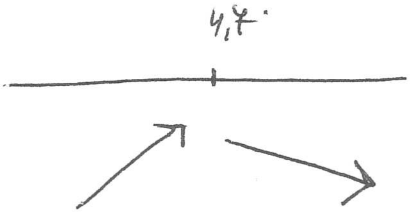
$$V = 6x^2 h \qquad 400 = 6x^2 + 10hx$$
$$h = \frac{200 - 3x^2}{5x}$$

$$V = \frac{6x^{\cancel{2}}(200 - 3x^2)}{5\cancel{x}} = \frac{6}{\cancel{5}}\cancel{200}^{40}x - \frac{6}{5}\cdot 3x^3$$
$$= 240x - \frac{18}{5}x^3$$

$$V' = 240 - \frac{18}{5}3x^2 > 0$$

$$V' = 0 \qquad 18\cdot 3x^2 = 240$$
$$x^2 = \frac{\cancel{240}^{80}\cdot 5}{18\cdot\cancel{3}} \qquad x = \sqrt{\frac{80\cdot 5}{18}} \simeq 4{,}7\ cm.$$

massimo!



$$h = \frac{\left(200 - \cancel{3}\cdot\frac{\cancel{80}^{40}\cdot 5}{3\cancel{6}\,\cancel{18}}\right)}{5\cdot(4{,}7)} = \frac{200 - \frac{200}{3}}{5\cdot 4{,}7} \simeq \frac{\frac{600-200}{3}}{5\cdot 4{,}7} \simeq 5{,}7\ cm$$

la scatola ha dimensioni

$3x = 14{,}1\ cm \qquad 2x = 9{,}4\ cm \qquad h = 5{,}7\ cm$

altri esempi nelle pagine.

3)

Una nave consuma ogni ora $36 + 0{,}04v^2$ di combustibile, v è la velocità. Percorre 2000 km. Che velocità deve tenere per avere un consumo minimo?

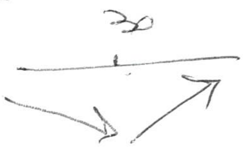
Il consumo sarà $f(v) = (36 + 0{,}04v^2)\,t$ $\quad t$ = tempo di viaggio

$$f(v) = (36 + 0{,}04v^2)\frac{2000}{v} = \frac{36\cdot 2000}{v} + 0{,}04\cdot 2000\,v$$

$$f'(v) = -\frac{36\cdot 2000}{v^2} + 0{,}04\cdot 2000 = \frac{-72\cdot 10^3 + 80v^2}{v^2}$$

$$f'(v) > 0 \qquad \frac{72\cdot 10^3}{v^2} < 80 \qquad v > \sqrt{\frac{72\cdot 10^3}{80}} \qquad v < -\sqrt{\cancel{\frac{72\cdot 10^3}{80}}}$$ trascuro perché <0!

$v > 30\ km/h$



per $v = 30\ km/h$ ho la velocità per un consumo minimo.

Le equazioni differenziali

a)0 $m\ddot{x} = mg$ $\ddot{x} = g$ caduta libera

a) **Forze costanti** (non dipendenti da spazio, tempo, velocità, ..)

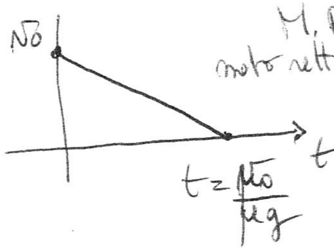
II legge della dinamica $\vec{F} = m\vec{a}$, con le derivate

$F = m\ddot{x}$ $\ddot{x}$ accelerazione. Supponiamo che F sia la forza di attrito radente $F = \mu mg$

μ coeff. di attrito < 1 $0 < \mu < 1$

è una forza che si oppone al moto, se è l'unica forza che agisce $\cancel{m}\ddot{x} = -\mu \cancel{m} g$ $\boxed{\ddot{x} = -\mu g}$

$\Rightarrow$ risolvendo tale equazione: $v = \dot{x} = v_0 - \mu g t$



M.R.U.A
moto rett. unif. accelerato.

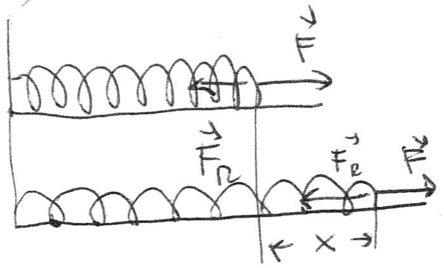
quando $v = 0$ $v_0 = \mu g t$

$\frac{dv}{dt} = -\mu g$ $dv = -\mu g\, dt$ integro $t = \frac{v_0}{\mu g}$

$v = -\mu g t + C$ per $t = 0$ $v = v_0$

$v = v_0 - \mu g t$

b) b1) **Forze non costanti**



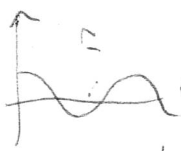
b1) **Moto di una molla.**

$\vec{F}_R = -kx$ k costante elastica

Equazione del moto:

$m\ddot{x} = -kx$ $\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$

$x = x_0 \cos \omega t$ $\omega^2 = \frac{k}{m}$



Si tratta di un moto oscillatorio (armonico)

b2) **Resistenza dell'aria** (a basse velocità)

$F_{Raria} = -kv = -k\dot{x}$

Equazione del moto di caduta libera

$m\ddot{x} = F_p - k\dot{x}$ F_p = forza peso

$\boxed{m\ddot{x} = mg - k\dot{x}}$

$\boxed{\ddot{x} = g - \frac{k}{m}\dot{x}}$

se $k = 0$ $\ddot{x} = g$ caduta libera senza attrito.

se m grande $\rightarrow \infty$ $\Rightarrow \frac{k}{m} \to 0$ $\ddot{x} \simeq g$

se m piccola $\rightarrow 0$ $\frac{k}{m} \to \infty$ $\Rightarrow$ accelerazione ridotta $\Rightarrow$

⇒ ecco perché una piccola massa arriva a terra dopo una massa più grande!

c) <u>Decadimento radioattivo.</u>

11

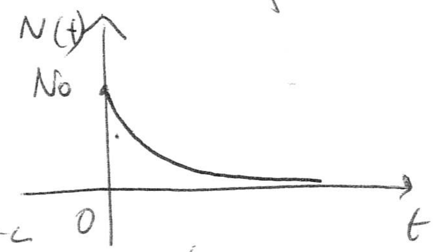
$N(t)$ nuclei radioattivi al tempo t
N_0 " " al tempo iniziale $t=0$

$$\boxed{\dot N(t) = -\lambda N(t)}$$ equazione differenziale

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = -\lambda N(t)}$$

la velocità di decrescita dei nuclei è direttamente proporzionale a quelli di partenza!

↳ risolvendola: $$\boxed{N(t) = N_0 e^{-\lambda t}}$$



il segno $-$ perché si riducono di numero nel tempo ~~...~~

e n. di Nepero $\simeq 2{,}718\ldots$

$\frac{dN}{N} = -\lambda\, dt$ integrando $\ln N = -\lambda t + c$

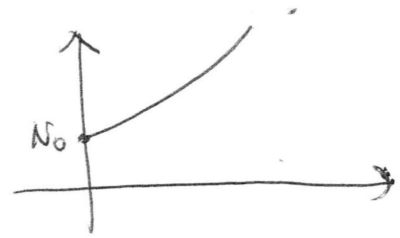
$N = e^{-\lambda t}\cdot e^{c}$ $N = N_0$ per $t=0$ $e^{c} = N_0$

$\Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$

d) <u>Crescita esponenziale</u>

Come precedentemente $N(t)$ popolazione al tempo t
N_0 " " $t=0$

$$\boxed{\begin{aligned}\dot N(t) &= hN(t)\\ \frac{dN}{dt} &= hN(t)\end{aligned}} \Rightarrow \boxed{N(t) = N_0 e^{ht}}$$



come sopra

La velocità di crescita di una popolazione è direttamente proporzionale ai presenti al tempo $t=0$

e) <u>Crescita logistica</u>

Situazione in cui quanto più numerosa sarà la popolazione, tanto più piccolo sarà il tasso di crescita. Si crea un fenomeno di popolazione limite

$$\boxed{\begin{aligned}\dot N(t) &= hN(t) - kN^2(t)\\ &= N(t)\left[h - kN(t)\right]\end{aligned}}$$ oppure $\frac{\dot N(t)}{N(t)} = h - kN(t)$

⇒

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = N(t)\cdot[h - k\,N(t)]}$$

è come se ci fosse una frenata nella crescita dovuta a limiti di cibo o altro... (ambiente) (risorse limitate)

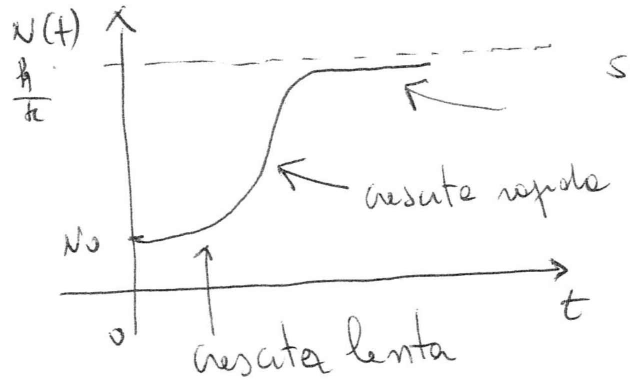
12

La soluzione di tale equazione è:

$$\boxed{N(t) = \frac{h\,e^{ht}}{k\,e^{ht} + \frac{h-kN_0}{N_0}}}$$

Negli anni 30 si studiò lo sviluppo di un protozoo il Paramecium caudatum che seguiva tale crescita. (Gause);
(Pearl) crescita della Drosophila melanogaster (moscerino);
(Reed) " popolazione degli Stati Uniti nel 1790 nel 1850 e nel 1910

Lo studio della curva $N(t)$ prevede considerazioni e calcoli che esulano da questo corso, comunque la funzione ha un andamento di questo tipo.



stabilizzazione della crescita.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{h\,e^{ht}}{k\,e^{ht} + \frac{h-kN_0}{N_0}} = \frac{h}{k}$$

f) Modello matematico della predazione

Equazioni di Lotka–Volterra (1926)

Descrivono le variazioni delle popolazioni dei pesci dell'Adriatico, considerando le fluttuazioni dei pesci predatori e delle prede.

Sia $x(t)$ il numero delle prede al variare del tempo e
$y(t)$ " " dei predatori "

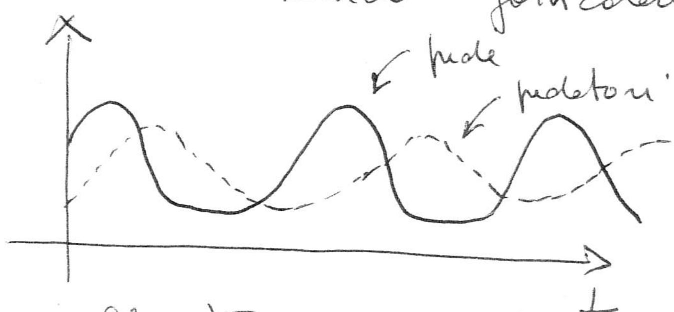
In assenza di predatori le prede si sviluppano in modo esponenziale cioè $\dot{x} = ax$ la variazione nel tempo delle prede segue la crescita esponenziale.

=)

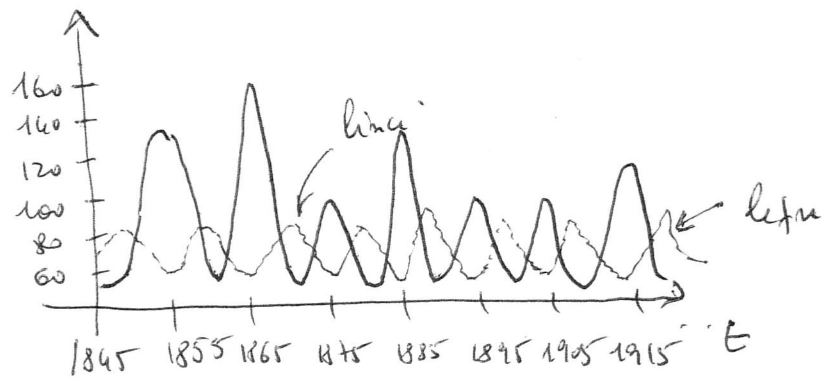
I predatori in assenza di prede non possono che morire.
cioè $\dot{y} = -cy$ legge esponenziale decrescente.
Introduciamo l'interazione tra le specie.
Allora la crescita dei predatori sarà proporzionale al numero delle prede oltre che al numero dei predatori stessi.
Quindi $\dot{y} = -cy + dx \cdot y$
analogamente per le prede $\dot{x} = ax - bxy$
Queste sono le equazioni di Lotka-Volterra.

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases}$$

Si ottiene un andamento utilizzando particolari valori di a, b, c ed d



I grafici sono oscillanti, in pratica al crescere delle prede crescono spostati i predatori, quando le prede diminuiscono anche i predatori calano e così avanti... le prede crescono, i predatori anche ma un po' di tempo dopo.
Curve analoghe sono state osservate in natura nel Canada tra le popolazioni di linci e di lepri dal 1845 al 1935



Le equazioni di Lotka-Volterra sono <u>non lineari</u> (termine xy) e non risolvibili a mano in modo semplice
$\Rightarrow$ altri metodi $\rightarrow$ computer.

14

d) Determinismo e caos.

a) Equazioni differenziali non lineari

a1) Lotka-Volterra. (già descritto prec.)

a2) Modelli epidemici: S.I.S.

a3) S.I.R. "

a4) Attrattore di Lorentz. (sistema caotico)

b) Biliardo e sistemi fortemente dipendenti dalle condizioni iniziali (passaggio al caos)

a2) S.I.S. (né mortale né immunizzante raffreddore, ...)

S suscettibili   I infetti

Popolazione chiusa (senza eventi demografici)

Si trascura il tempo di incubazione ; N n° di individui

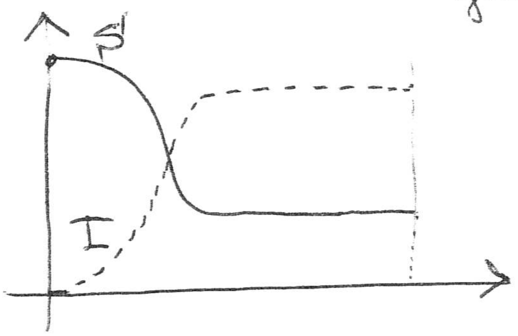
$I(t) + S(t) = N$ $S \xrightarrow{r} I \xrightarrow{\gamma} S$ r tasso di infezione, γ " " guarigione.

equazioni del modello

$$\begin{cases} \dfrac{dI}{dt} = rSI - \gamma I \\ \dfrac{dS}{dt} = -rSI + \gamma I \end{cases}$$

$\Rightarrow$ gli infetti crescono quando incontrano un suscettibile (rSI) e poi guariscono $-\gamma I$

$\Rightarrow$ I suscettibili diminuiscono quando incontrano un infetto ed aumentano quando gli infetti guariscono.



a3) S.I.R

$N = I(t) + S(t) + R(t)$ (morbillo, pertosse, rosolia...)

R rimossi

R numero guariti, immuni, deceduti, isolati, in quarantena ecc..

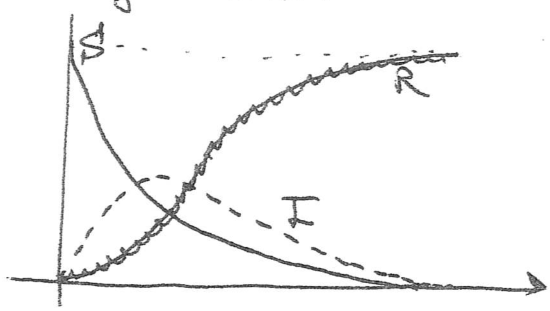
Equazioni del modello

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -rSI \\ \dfrac{dI}{dt} = rSI - \gamma I \\ \dfrac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases} \Rightarrow$$

⇒ i suscettibili calano quando incontrano un infetto, gli infetti aumentano quando incontrano un suscettibile e calano quando guariscono; i rimossi R aumentano quando gli infetti guariscono.

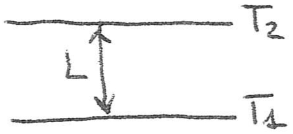
15

Grafici



a4) Attrattore di Lorenz (1963)

Il modello considera un fluido in un campo gravitazionale costante tra due piani orizzontali tenuti a temperature fisse, con la temp. del piano inferiore maggiore di quello superiore.



$T_1 > T_2$

⇒ equazioni per l'evoluzione temporale della velocità, temperatura, pressione e densità

Le equazioni sono

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma(y-x) \\ \dfrac{dy}{dt} = -xz + rx - y \\ \dfrac{dz}{dt} = -bz + xy \end{cases}$$

Tale sistema è applicabile all'atmosfera e al magma sotto la crosta terrestre!

$\sigma = \dfrac{\chi}{\nu}$

χ coeff. di diffusione termica

ν coeff. di viscosità

$r = \dfrac{R}{R_c}$ $\quad$ R = n. di Rayleigh $\quad$ $R = \dfrac{\rho_0 g \alpha L^3 (T_1 - T_2)}{\chi \nu}$

ρ_0 densità media del flusso

α coeff. di dilatazione termica

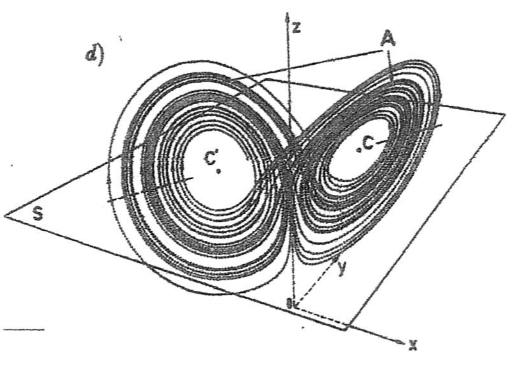
b dipende dalla geometria

x è legata alla velocità

$\left.\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right\}$ legate alla temperatura

⇒ effetto farfalla

Il sistema sembra stabile intorno a c' e poi improvvisamente salta a destra, si stabilizza intorno a c e poi salta intorno a c' ....



nel modello di Lorenz

c' e c punti instabili

Sono sistemi fortemente dipendenti dalle condizioni iniziali

Se si conoscesse con precisione infinita la condizione iniziale $x(0)$ (x rappresenta una traiettoria) allora si potrebbe determinare $x(t)$ $\forall\, t>0$. Allora se due traiettorie si allontanano esponenzialmente rende impossibile predire lo stato del sistema per tempi lunghi.

In un sistema caotico $\boxed{|x(t)-x'(t)| \sim |[x(0)-x'(0)]| e^{\lambda t}}$

dove $x(t)$ sono traiettorie e λ dipende dal tipo di sistema.

Un piccolo errore in $x(0)-x'(0)$ delle cond. iniziale si amplifica molto velocemente. Infatti in $t \sim \frac{2{,}3}{\lambda}$ l'incertezza cresce di un fattore 10, in $\frac{4{,}6}{\lambda}$ di un fattore 100, in $\frac{9{,}2}{\lambda}$ di un fattore 10'000!

⇒ impatto sulle previsioni meteorologiche!

Lo stato dell'atmosfera al tempo t non è noto con una alta precisione, gli strumenti di misura inoltre hanno una accuratezza finita. Non si va oltre un tempo $\simeq \frac{c}{\lambda}$ può andare bene per $\frac{1}{\lambda} \simeq 10$ gg.

Può il batter d'ali di una farfalla in Brasile provocare un tornado in Texas? Titolo conferenza di Lorenz 1979

Piccole incertezze * (centimetri) si estendono amplificate su scale di metri fino a migliaia di km. in qualche settimana!

* velocità del vento

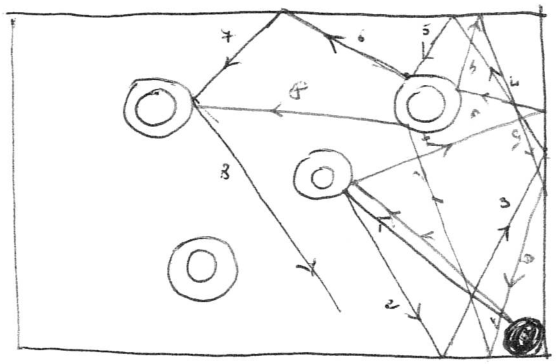
Filastrocca

Per colpa di un chiodo si perse lo zoccolo
" di uno zoccolo si perse il cavallo
" di un cavallo " " cavaliere
" di un cavaliere " la battaglia
" di una battaglia " la guerra ed il regno.

⇒

17

b) Biliardo



Dopo pochi urti le traiettorie sono completamente diverse! Basta una piccola differenza dell'angolo di partenza!

Certi sistemi hanno una evoluzione nel tempo che dipende fortemente dalle condizioni iniziali di partenza.

Quindi piccolissime differenze iniziali possono provocare alla lunga notevoli differenze nella evoluzione.

FRATTALI

Un frattale è una figura geometrica che grazie ad una sua caratteristica si ripete all'infinito, con la stessa forma e sempre più rimpicciolita.

Benoit Mandelbrot formalizza le sue proprietà matematiche lavori: (1950 - 1970)

PROPRIETÀ

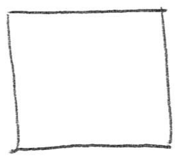
1) Autosimilarità: unione di copie di se stesso a scale diverse
2) Struttura fine: le strutture più ampie mostrano i particolari di quelle più piccole.
3) Dimensione non intera (frazionaria)

DIMENSIONE GEOMETRICA D

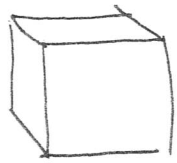
Segmento	dimensione	1
Piano	"	2
Solido	"	3

Esempi

$D = 1$
$N = 1$



$D = 2$
$N = 1$

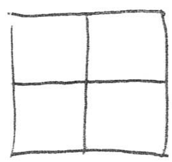


$D = 3$
$N = 1$

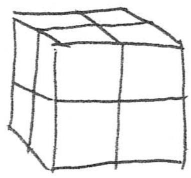
N numero di parti identiche

Suddividiamo le figure in parti identiche

$N = 2$



$N = 4$

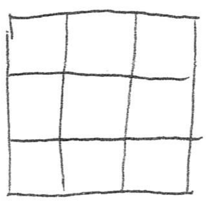


$N = 8$

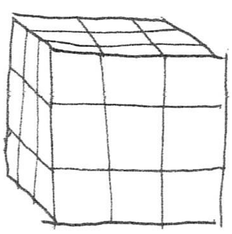
$\Rightarrow$ $\boxed{N = 2^D}$

$N = 2^1 = 2$
$N = 2^2 = 4$
$N = 2^3 = 8$

$N = 3$



$N = 9$



$N = 27$

$\boxed{N = 3^D}$

$N = 3^1 = 3$
$N = 3^2 = 9$
$N = 3^3 = 27$

$\Rightarrow$

Più in generale si definisce la dimensione frattale con la relazione $\boxed{N = (p)^D}$; p è il numero di parti in cui la struttura viene divisa all'unità.

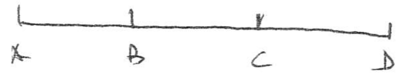
19

$$\Rightarrow \boxed{D = \log_p N = \frac{\log N}{\log p}}$$

a) Il fiocco di neve di Koch (1870 – 1924)

Costruzione del frattale

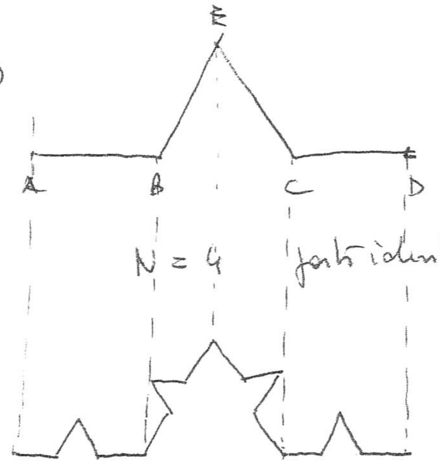
1)



suddiviso in 3 parti

$p = 3$

2)



$N = 4$ parti identiche

3)

e così avanti. Si crea un fiocco di neve

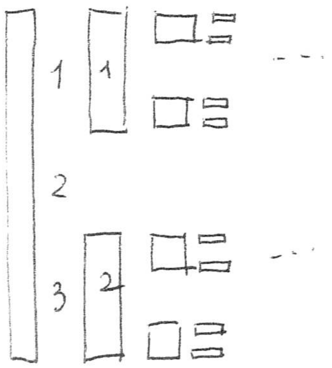
Qual'è la sua dimensione D?

$N = 4 \qquad p = 3 \qquad D = \dfrac{\log 4}{\log 3} \simeq 1{,}26$

$N \doteq p^D$

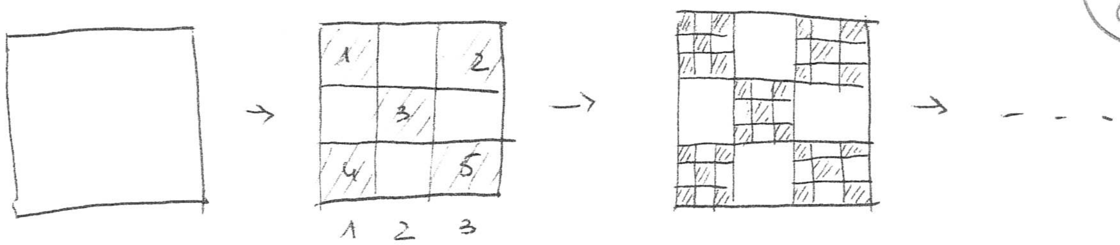
In generale la dimensione è sempre $D = \dfrac{\log N}{\log p}$

b) Sbarra di Cantor



$N = 2 \qquad p = 3 \qquad D = \dfrac{\log 2}{\log 3} \simeq 0{,}63$

c) Le scatole frattali

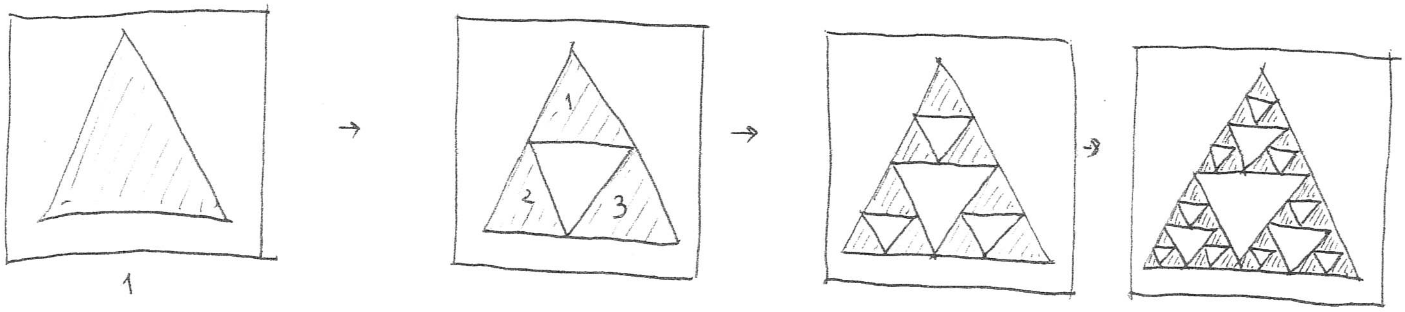


$N = 5$
$P = 3$

$$D = \frac{\log 5}{\log 3} \simeq 1,46\ldots$$

d) Il triangolo di Sierpinski (1882–1969)

Δ equilatero!



Si prende un Δ equilatero, lo si divide in 3 parti $N = 3$ (togliendo la parte centrale) dopo aver diviso a metà $P = 2$ i lati.

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} \simeq 1,58$$

e) Le superfici grinzose (montagne) hanno un $D > 2$
" " con buchi (spugna) " $D < 2$

$\boxed{D \text{ sempre } \leq 3!}$

Applicazioni dei frattali

Un classico esempio è quello delle coste (le coste frastagliate della Gran Bretagna) o dei corsi d'acqua.

⇒

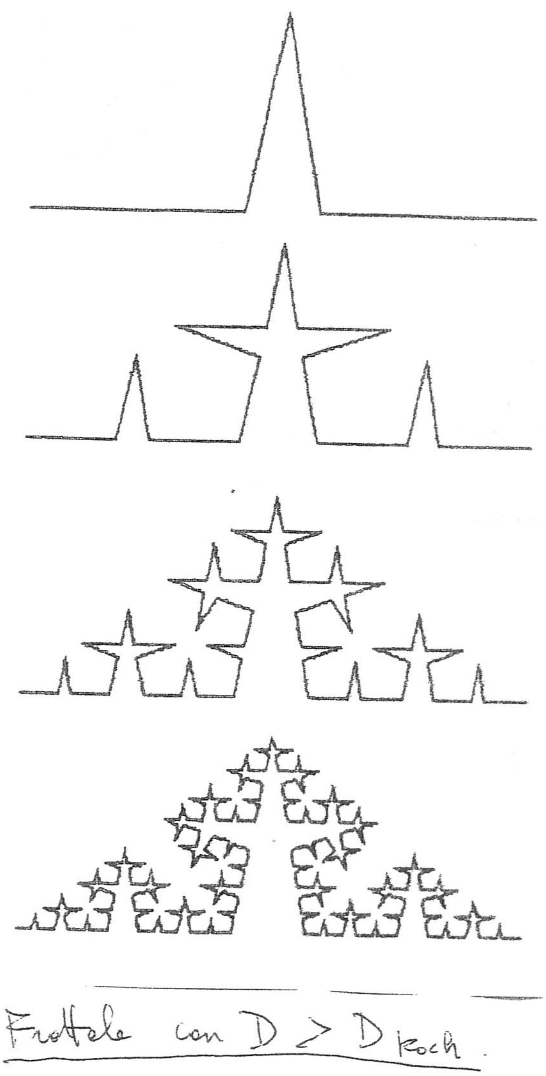
In natura ogni ramo di un albero assomiglia all'intero albero! Cristalli di ghiaccio, la felce, il broccolo verde romano ---.

In medicina: struttura bronchiale ed alveolare dei polmoni hanno un volume ridotto mentre lo sviluppo superficiale è enorme (nell'uomo la sup. di un campo da Tennis!)
perché? Si pensa ad una massimizzazione dello scambio gassoso tra respirazione ed apparato circolatorio.

La struttura della vena porta nel fegato è frattale!

nell'Arte: Disegni frattali colorati al computer, Escher

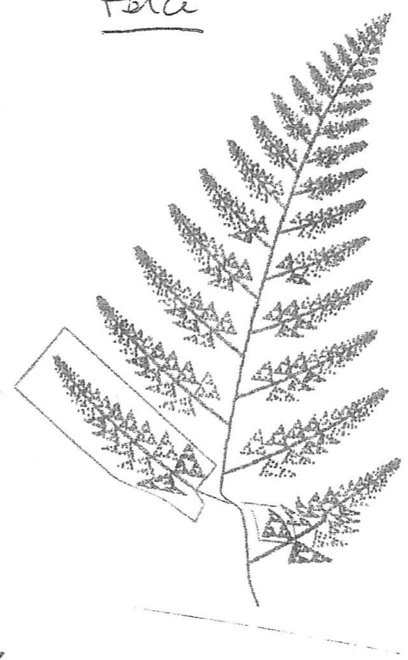
Cinema: realizzazione della tempesta di neve in "Frozen"



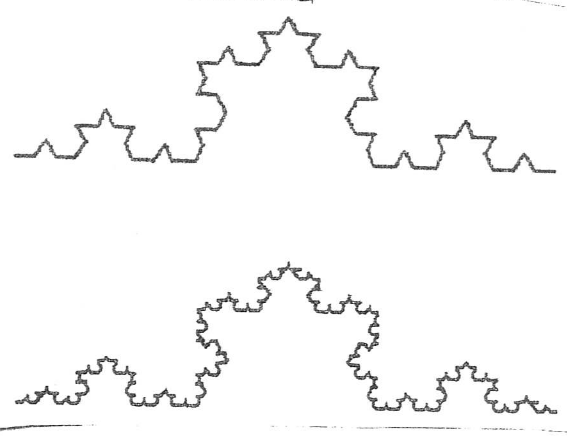
Frattale con $D > D_{Koch}$

$D > 1{,}26$
copre più parti del piano della curva di Koch.

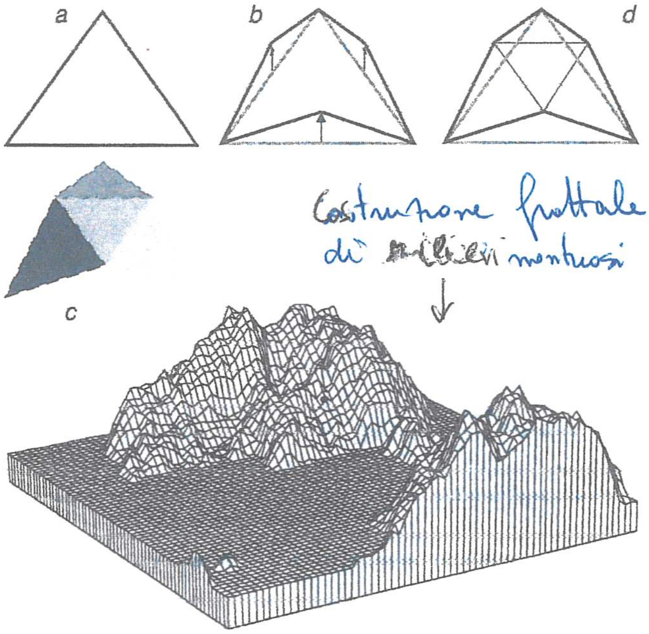
Felce



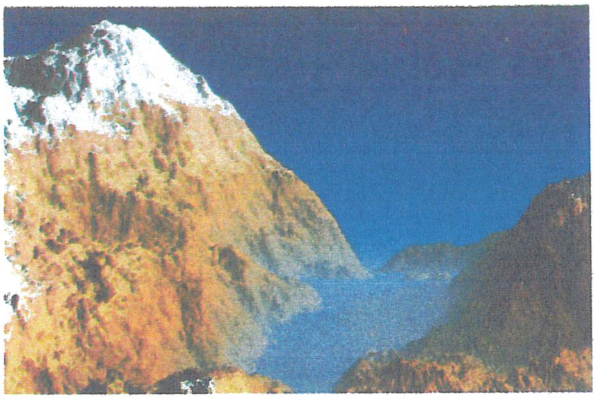
Curva di Koch



$D \simeq 1{,}26$

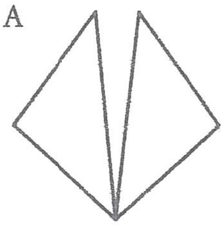


Costruzione frattale di ~~rilievi~~ montuosi



Si possono creare paesaggi frattali con il metodo dello spostam
dei punti medi. I punti medi dei lati di un triangolo (*a*) veng
uniti da segmenti e spostati in su o in giù, fuori dal piano dell
magine (*b*). Si ottengono così quattro piccoli triangoli su cui s
pete il procedimento. Una legge di distribuzione stabilisce l'en
dello spostamento e quindi determina la scabrosità del terreno f
tale. Un programma eidomatico genera poi ombreggiature ap
priate (*c*), dando vita a risultati straordinariamente realistici

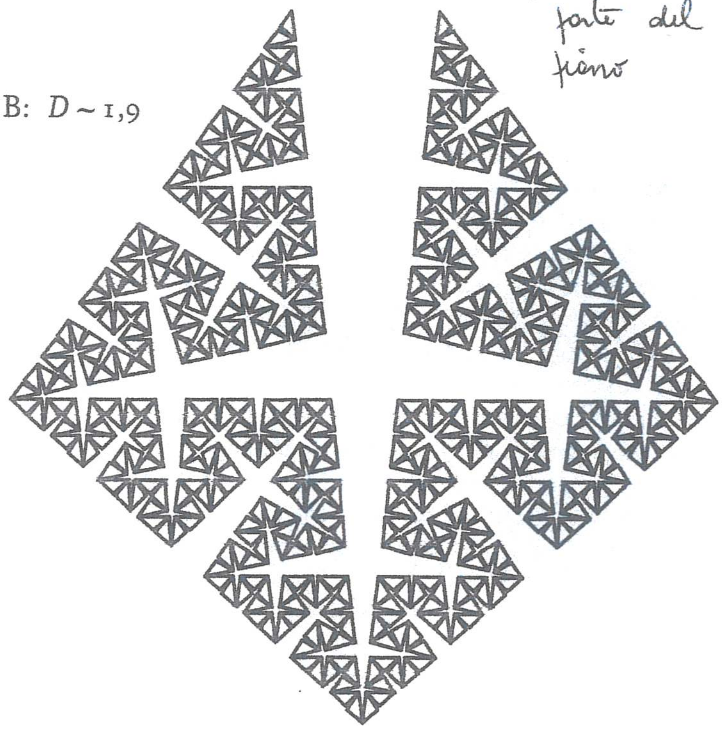
A

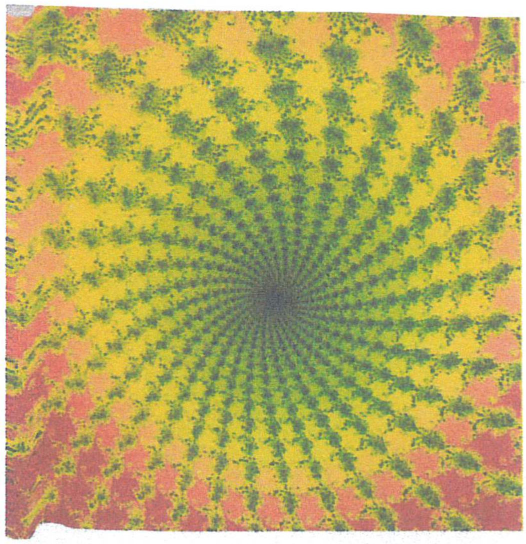


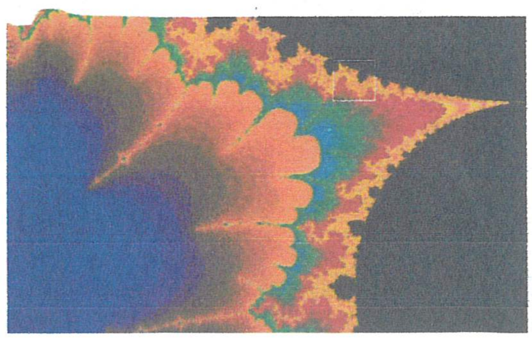
arborescenze polmoni

D di poco minore di 2
$D \simeq 1,9$ copre buona parte del piano

B: $D \sim 1,9$







Immagini artistiche →

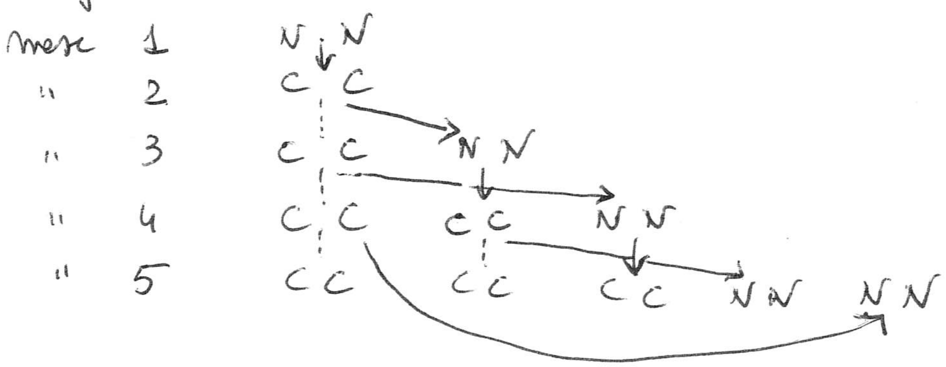
FIBONACCI E SEZIONE AUREA

Fibonacci 1200 Pisa.

"Quante coppie di conigli avremo a fine anno se cominciamo con una coppia che genera ogni mese un'altra coppia che a sua volta procrea dopo due mesi di vita?"

numeri di Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

tali numeri indicano quante coppie di conigli ci sono un mese dopo l'altro.



N N coppia non fertile
C C " fertile
↓ la coppia diventa fertile
⋮ la " sopravvive
→ " " genera un'altra coppia.

Regola per la serie

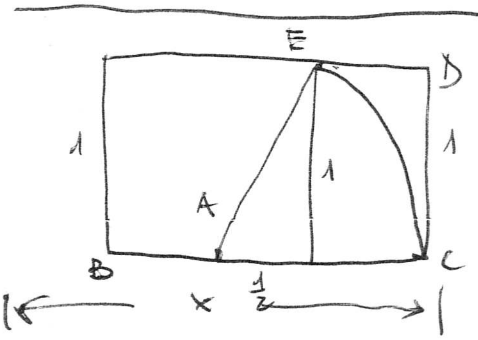
$F(1) = 1$
$F(2) = 1$ . . . $\boxed{F(N) = F(N-2) + F(N-1)}$
$F(3) = 2$
$F(4) = 3$

$$\frac{F(N)}{F(N-1)} = \Phi$$

prendo i numeri di Fibonacci e calcolo Φ

$\frac{1}{1} = 1 \quad \frac{2}{1} = 2 \quad \frac{3}{2} = 1{,}5 \quad \frac{5}{3} = 1{,}\overline{6} \; \dots \; \frac{21}{13} = 1{,}615\dots \; \dots \; \frac{89}{55} = 1{,}61818\dots$

SEZIONE AUREA



$AE = \sqrt{\frac{1}{4}+1} \simeq 1{,}180$ $\qquad \frac{BC}{DC} = 1{,}618 = \Phi$

$BC = 0{,}5 + 1{,}180 = 1{,}618$

$AB = x$
$AC = 1$
$CB = x-1$

AC = sezione aurea

$AB : AC = AC : CB$

$x : 1 = 1 : x-1$

$x(x-1) = 1$

$x^2 - x - 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1-\sqrt{5} \end{cases}$$

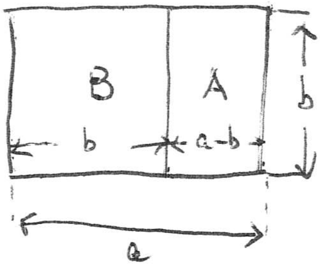
$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\dots = \Phi$$

- gli architetti greci facevano uso dei rettangoli aurei.

Se da un rettangolo aureo si taglia un quadrato, anche il rettangolo rimanente è aureo.

24

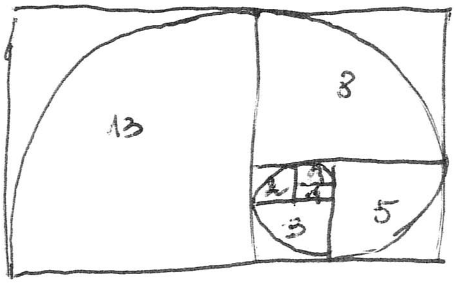
Rettangolo aureo



$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} = \Phi \simeq 1,618\ldots$$

$$a : b = b : a-b$$

SPIRALE DI FIBONACCI

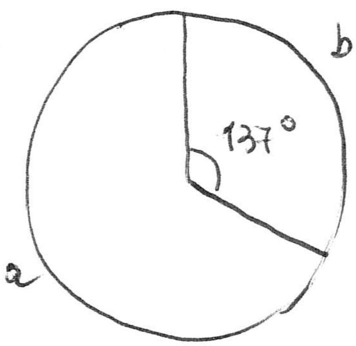


ammonite!

$1+1=2$
$2+1=3$
$3+2=5$
$5+3=8$
$8+5=13$
$\vdots$

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 ...

Angolo aureo



$b < a \qquad a+b = c \ (360°)$

$$\boxed{b : a = a : c}$$

$$\frac{a}{b} = 1,618\ldots = \Phi$$

$$b = \frac{a}{1,618} = \frac{360-b}{1,618}$$

$\Rightarrow \ 1,618\, b = 360 - b \qquad 1,618\, b + b = 360 \qquad b = \frac{360}{2,618} \simeq 137°$

→ girasole: n. di Fibonacci
- 89 spirali in senso orario
- 55 " " antiorario
- 34 " " orario

gli angoli tra le spirali $\simeq 137,5°$

f) **Matematica e Teoria della Relatività** (25) 1)

Sistemi inerziali — Relatività di Galileo

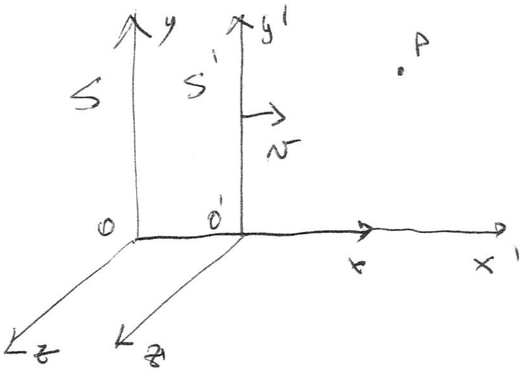
Un sistema S dove valgono le leggi della dinamica è inerziale

Un sistema S' che si muove di moto rett. uniforme rispetto ad S è ancora inerziale

⇒ ∃ infiniti sistemi inerziali tutti equivalenti per la descrizione e spiegazione dei fenomeni dinamici

⇒ ∄ un sistema di riferimento privilegiato, cioè distinguibile

Trasformazioni di Galileo



$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

cioè un punto $P(x,y,z)$ in S avrà coordinate $P(x',y',z')$ in

Traslazioni oppure

$$\begin{cases} x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

⇒ Le leggi della dinamica (Newton) risultano invarianti rispetto ad una trasf. di Galileo. (cioè non cambiano forma)

⇒ Le equazioni di Maxwell (elettromagnetismo) non sono invarianti per trasformazioni di Galileo (cambiano forma)

⇒ Le equazioni di Maxwell sono invarianti per le trasformazioni di Lorentz, le equazioni di Newton non sono invarianti per le trasf. di Lorentz.

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \gamma(x' + vt) \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \end{cases} \qquad \boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

c velocità della luce — se $v \ll c$ $\quad \frac{v^2}{c^2} \to 0$

$\gamma = 1$ ⇒ ottengo le trasf. di Galileo ⇒

Einstein (1905) pone due postulati (verità non dimostrabili?)

1) Tutti i sistemi inerziali sono equivalenti per la descrizione e spiegazione dei fenomeni fisici (tutti i fenomeni fisici) (convincimento anche in base ad esperimenti)

2) La velocità della luce è costante

26

$\boxed{\text{Conseguenze}}$

Valgono le equazioni di Galileo o quelle di Lorentz

- Se valgono quelle di Galileo non sono corrette le equazioni di Maxwell!
- Se valgono quelle di Lorentz non sono corrette le equazioni della dinamica di Newton!
- Posso eliminare le equazioni di Maxwell che funzionano benissimo? No! ⇒ Sono valide le equazioni di Lorentz
- Ma le equazioni di Newton non sono invarianti per le trasf. di Lorentz ⇒ Devo cambiare le equazioni di Newton, cioè devo cambiare le leggi della dinamica per renderle invarianti per le trasf. di Lorentz.

È ciò che fa Einstein! Cambia la dinamica di Newton!

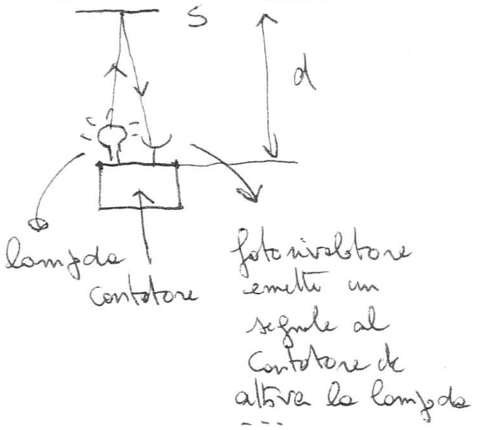
Notiamo che se $\gamma \to 1$ la dinamica di Newton è valida perché le trasf. di Lorentz coincidono con quelle di Galileo! Se $\gamma \to 1$ $v \ll c$ ⇒ quindi la dinamica di Newton è il limite della dinamica di Einstein quando $v \ll c$ (basse velocità)

⇒ $\boxed{\text{Relatività Ristretta}}$

GLI INTERVALLI DI TEMPO SONO UGUALI PER TUTTI

Un orologio è un contatore di eventi che si succedono nel tempo: sorgere del sole, i battiti del nostro polso ...

OROLOGIO A LUCE



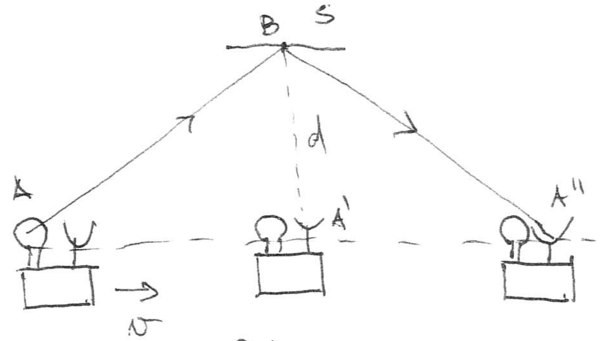
$\Delta\tau$ tempo tra uno scatto del contatore ed il successivo (tempo di andata e ritorno della luce)

$$\boxed{\Delta\tau = \frac{2d}{c}}$$

c velocità della luce

orologio in quiete!

Orologio in moto



Δt tempo di andata e ritorno della luce

$AA'' = v \cdot \Delta t$

$AA' = v \cdot \frac{\Delta t}{2}$

$AB = \frac{c\Delta t}{2}$ luce

perché quando l'orologio percorre AA' la luce percorre AB

Teor. di Pitagora al Δ ABA'

$$d = A'B = \sqrt{AB^2 - (A'A)^2} = \sqrt{\left(c\frac{\Delta t}{2}\right)^2 - \left(v\frac{\Delta t}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{c^2\Delta t^2}{4} - \frac{v^2\Delta t^2}{4}} = \frac{1}{2}\Delta t\sqrt{c^2 - v^2} = \frac{1}{2}\Delta t \cdot \sqrt{c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\Delta t \cdot c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow 2d = c\Delta t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Delta t}} = \frac{2d}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \Delta\tau \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \underline{\underline{\gamma \cdot \Delta\tau}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \geq 1 \Rightarrow \boxed{\Delta t \geq \Delta\tau}$$

|| L'intervallo di tempo Δt misurato dall'orologio in moto è maggiore di quello $\Delta\tau$ " " in quiete ||

|| Il tempo per l'orologio in moto scorre più lentamente del tempo dell'orologio in quiete! ||

$\Rightarrow$ Dilatazione dei tempi (28)

Verifiche sperimentali

Quanto "vive" il mesone μ? (muone)

Proviene dai raggi cosmici. Il muone decade in elettroni e neutrini. Indagine statistica.
Si introduca il tempo di dimezzamento ($t_{1/2}$) ovvero il tempo in cui decade la metà dei muoni di una certa popolazione

$t_{1/2} = 1,5 \cdot 10^{-6}$ s $= 1,5\,\mu s$

cioè se ho 1000 muoni dopo $1,5\,\mu s$ ne ho 500
dopo $3\,\mu s$ ne ho 250
" $4,5\,\mu s$ ne ho 125 ....

$\Rightarrow$ dopo $15\,\mu s$ tutti i muoni sono decaduti.

Poniamo un rivelatore di particelle a 4500 m di quota e osserviamo il passaggio di muoni all'ora ($1000\,\mu$)

$v_\mu \simeq 3 \cdot 10^8$ m/s $\simeq c$ per percorrere 4500 m impiegano

$t = \frac{4500}{3 \cdot 10^8} = \frac{1500}{10^8} = 15 \cdot 10^{-6}$ s $= 15\,\mu s \Rightarrow$ dovrebbero essere tutti decaduti. Invece a livello del mare vedo $\simeq 500\,\mu$ all'ora. Come è possibile?

perché la loro velocità è circa $v = 0,995\,c$

$\Rightarrow \gamma \simeq 10 \Rightarrow \Delta t = 10\,\Delta\tau \quad \Delta\tau \simeq 1,5\,\mu s$

$\Rightarrow \Delta t \simeq 15\,\mu s \Rightarrow$ I μ in moto "vivono" in media 10 volte di più di quelli in quiete! $\Rightarrow$ per cui il loro tempo di dimezzamento è di $15\,\mu s$, quindi a livello del mare ne vedo 500!

Vale il paradosso dei gemelli? (Bergson)

Cioè tra due gemelli A e B, se A è fermo e B fa un viaggio spaziale a $v \simeq 0,99\,c$ mentre A invecchia di ades. 20 anni B solo di 2,8 anni, quindi quando ritorna è più giovane di 17,2 anni! NO! Non vale! Gli osservatori (A e B) devono essere inerziali (v costante) questo non avviene! B va da $v = 0$ a $v = 0,99\,c$ poi rallenta e torna indietro!

$\Rightarrow$ accelera!

PROBABILITÀ

1) Cenni di calcolo combinatorio

a) Quante bandiere di tre colori diversi, a strisce verticali, posso fare? Colori R, B, V.

RBV	BRV	VRB
RVB	BVR	VBR

$\Rightarrow$ 6 bandiere $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$

Per ogni colore ho 2 possibilità, avendo 3 colori ho 6 possibilità.

E con 4 colori? Per ogni colore ne ho 6, ma avendo 4 colori ne ho $24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

RBVG	RVBG	RGVB
RBGV	RVGB	RGBV

$\Rightarrow 6 \cdot 4 = 24$

Si chiamano permutazioni semplici

$$\boxed{n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!}$$ n fattoriale

b) Quanti anagrammi, anche senza senso, posso fare con la parola MAMMA?

MAMMA	AMMMA
MMAMA	AAMMM
MMMAA	AMAMM
MMAAM	AMMAM
MAAMM	
MAMAM	

$\Rightarrow 10$ Si chiamano permutazioni con ripetizione!

Sono $\boxed{\dfrac{n!}{k!\, h!}}$ n il n. di lettere k, h il numero di lettere ripetute

$$\Rightarrow \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 5 \cdot 2 = 10$$

c) In una gara di corsa ci sono 4 concorrenti A, B, C, D. Quanti sono i possibili podi? (1°, 2°, 3°)

ABC	D
ABD	C
ACB	D
ACD	B
ADB	C
ADC	B

6×4 concorrenti $= 24$ $n = 4$, $k = 3$

Sono $\boxed{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}$

Disposizioni semplici

d) Quanti numeri diversi di 3 cifre si possono fare con le cifre 4 e 7? 30

444	777
447	747
474	774
477	744

8 possibili $= 2^3$

$n = 2$ (4,7) $\Rightarrow \boxed{n^k}$

$k = 3$ cifre

Sono le Disposizioni con ripetizione

Ancora... quante schedine devo giocare per essere sicuro di vincere al totocalcio? (fare 13!)

$n = 3$ $\quad k = 13$

1, x, 2 $\quad \Rightarrow n^k = 3^{13} = 1.594.323$ schedine!

e) Quante strette di mano si possono dare 6 persone?

Ogni persona stringerà la mano ad altre 5 quindi $6 \cdot 5 = 30$, ma ~~se~~ A da la mano a B anche B da la mano ad A quindi $\frac{30}{2} = 15$

$$\binom{n}{k} = \boxed{\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}}$$

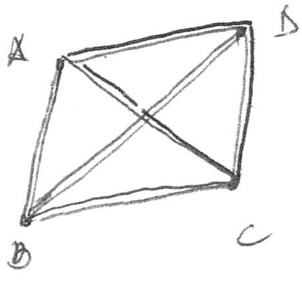
n persone

k strette di mano a due a due.

$\Rightarrow \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ $\quad$ Combinazioni semplici

Ancora...

Ho 4 punti (complanari) non allineati, quanti Δ riesco a costruire?



Δ ABC

ABD

BCD

ACD

4 triangoli

punti $= n = 4$

vertici Δ $k = 3$

$$\frac{4(3)\cdot 2}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

Def. classica di probabilità P (31)

La probabilità di un evento è il rapporto tra il numero di casi che verificano l'evento ed il numero di casi possibili. (sempre che tutti abbiano le stesse P di verificarsi) (Laplace)

Evento E impossibile $p(E) = 0$
" E certo $p(E) = 1$
" E aleatorio $0 < p(E) < 1$

Es. Calcolare la p che, lanciando un dado esce il numero 6. $p(E) = \frac{1}{6}$
(ma anche 1, 2, 3, 4, 5 ...)

Calcolare la p che, lanciando un dado esca un numero pari. casi possibili 6
"favorevoli 3
$p(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Es. Calcolare la probabilità che lanciando 3 monete si ottengono 2 T e 1 C Testa → T, Croce → C

casi possibili $2^3 = 8$ Disp. con ripetizione
" favorevoli TTC, TCT, CTT 3

$p(E) = \frac{3}{8}$

Es. Da un'urna, che contiene 6 palline bianche e 9 blu, se ne estraggono 2 contemporaneamente. Calcolare la p degli eventi A: le palline sono bianche
B: " " 1 bianca ed 1 blu.

Casi possibili $\binom{15}{2} = \frac{15 \cdot \cancel{14}^{7}}{\cancel{2}} = 105$ non conta l'ordine!

casi favorevoli A $\binom{6}{2} = \frac{\cancel{6}^{3} \cdot 5}{\cancel{2}} = 15$ $P(A) = \frac{15}{105} = \frac{1}{7}$

" B $6 \cdot 9 = 54$ * ⇒

↳ $\frac{54}{105} = \frac{18}{35}$

* perché ∀ pallina bianca posso avere 9 blu! e viceversa

Es. Calcola la p di vincere un terno al lotto giocando tre numeri su una determinata ruota.

casi possibili $\binom{90}{5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$

32

casi favorevoli $\binom{87}{2} = \frac{87 \cdot 86}{2}$

$$\Rightarrow p(E) = \frac{\cancel{87 \cdot 86}}{2} \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cancel{87 \cdot 86}} = \frac{1}{11.748}$$

Perchè 87? perchè i numeri che restano che posso combinare a 2 a 2 sono 87, infatti 3 sono stati già giocati!

Es. Da un mazzo di 52 carte se ne estrae una. Calcolare la p che sia

a) un asso b) un 5 nero c) una figura di fuochi

d) una carta nera

a) $\frac{4}{52}$ (assi) $= \frac{1}{13}$ b) $\frac{1}{26}$ (2 tipi di carte nere) c) $\frac{3}{52}$ (3 figure) d) $\frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

Es. Calcolare la p di ottenere, al lotto:

A) Una cinquina, giocando 5 numeri su una ruota fissata

$$P(E) = \frac{1}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{43.949.268}$$

B) Una quaterna?

$$P(E) = \frac{\binom{86}{1}}{\binom{90}{5}} = \frac{86}{43.949.268}$$

$\binom{86}{1} = 86$ casi favorevoli

4 numeri sono scelti! resta solo 1 posto.

Entropia e probabilità

II principio della termodinamica

Ogni sistema isolato (non scambia energia con l'ambiente), tende ad evolvere spontaneamente verso lo stato con la massima entropia S.

L'entropia è una misura dell'ordine e del disordine di un sistema.

- Ha una definizione termodinamica : $\boxed{\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}}$ $\left[\frac{J}{K}\right]$
 (Clausius, Kelvin) : la variazione di entropia ΔS è pari alla variazione di calore ΔQ a temperatura fissa T
- Ha una definizione statistica-probabilistica : $\boxed{S = k_B \ln W}$
 (Boltzmann) k_B cost. di Boltzmann
 $k_B \simeq 1{,}38 \cdot 10^{-23} \left[\frac{J}{K}\right]$

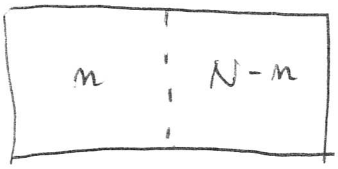
W cos'è? Vedremo....

In generale : Entropia bassa → sistema ordinato
 " alta → sistema disordinato

L'esempio ideale è un gas che è caratterizzato dalla pressione P che esercita sulle pareti che lo contengono, il volume che occupa V e la sua temperatura T. Queste 3 variabili P, V, T costituiscono le coordinate termodinamiche e caratterizzano un ben determinato $\boxed{\text{macrostato}}$. Ora il gas è costituito da N molecole con la loro velocità e posizione per cui ogni macrostato può essere costituito da numerosi $\boxed{\text{microstati}}$ che descrivono il gas non nel suo complesso ma nei suoi costituenti.

Il problema è capire quanti microstati appartengono ad uno specifico macrostato.

Mettiamo il gas in un recipiente con una separatore interno. Nella parte sinistra ho n molecole, nella parte destra ne avrò $N-n$, in totale N!.



34

I possibili microstati sono le combinazioni semplici di N elementi a gruppi di n (o $N-n$ è lo stesso!)

$$\binom{N}{n} = \frac{N(N-1)(N-2)\dots(N-n+1)}{n!} =$$

moltiplico sopra e sotto per $(N-n)!$

$$= \frac{N(N-1)(N-2)\dots(N-n+1)(N-n)!}{n!\,(N-n)!} =$$

$$= \frac{N(N-1)(N-2)\dots(N-n+1)(N-n)(N-n-1)\dots 2\cdot 1}{n!\,(N-n)!} = \boxed{\frac{N!}{n!\,(N-n)!}}$$

$\boxed{\text{Questo è } W}$ $\qquad \boxed{S = k_B \ln W}$

se $n = 0$ $\quad 0! = 1 \Rightarrow S = k_B \ln \frac{N!}{N!} = k_B \ln 1 = 0$

se $N = n$ lo stesso $S = 0$ $\quad \underline{S = 0}$ massimo ordine entropia nulla

se $n = 1$ $\quad N-n = 5 \quad W = \frac{6!}{1!\,5!} = 6 \quad S = k_B \ln 6$

$n = 2 \quad N-n = 4 \quad W = \frac{6!}{2!\,4!} = 10 \quad S = k_B \ln 10$

$n = 3 \quad N-n = 3 \quad W = \frac{6!}{3!\,3!} = 20 \quad S = k_B \ln 20$

$n = 4$ come $n = 2$ $\quad S = k_B \ln 10$

e così avanti.

W è massimo quando $\frac{n}{2} = \frac{N-n}{2}$ ovvero quando $W = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}\right)!\left(\frac{N}{2}\right)!}$ e quindi lo è S

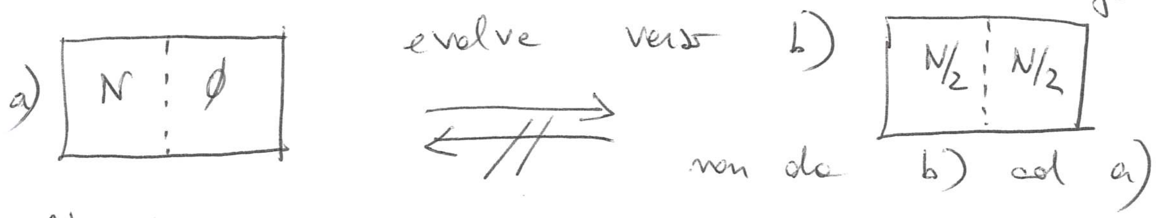
La massima entropia è caratterizzata da una distribuzione uniforme di molecole di gas a dex e a sin.

$\Rightarrow$ Stato di equilibrio ha la massima entropia

I sistemi isolati evolvono spontaneamente verso lo stato di equilibrio con massima entropia

Tale evoluzione è irreversibile. Il sistema non ritorna spontaneamente allo stato iniziale (ad es. tutte le molecole messe da una sola parte. a)

35



L'entropia non si riduce senza un intervento esterno che necessita di una somministrazione di energia.

Questa interpretazione statistico-probabilistica dell'entropia è dovuta a Boltzmann.
Solo i processi fisici con entropia crescente sono permessi in sistemi isolati, questo sembra contraddire la reversibilità microscopica sempre presente.
Nel passaggio tra microscopico e macroscopico si perde la reversibilità dei processi. Perché? Problema complesso!!

— ° — ° —