Incontro 14

Energia Cinetica Relativistica

Anche qui dovremo scrivere delle formule, ma cercheremo – come al solito - di "dare il significato intuitivo" delle stesse.

Iniziamo con il richiamare la definizione di <<Lavoro>>:

Lavoro = Forza • Spostamento

Per uno spostamento infinitesimo si scrive:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{s} = d\vec{p} \cdot \vec{v} \qquad (*)$$

In precedenza abbiamo però messo in evidenza la seguente relazione:

$$\frac{d\vec{v}}{v} = \frac{1}{\gamma^2}\frac{d\vec{p}}{p}$$

per cui …. si ottiene:

$$d\vec{p} = p\gamma^2 \frac{d\vec{v}}{v}$$

Sostituiamo in (*) :

$$dL = d\vec{p} \cdot \vec{v} = p\gamma^2 \frac{d\vec{v}}{v} \cdot \vec{v}$$

Ma $p = \gamma m_0 v$, e quindi:

$$dL = p\gamma^2 \frac{d\vec{v}}{v} \cdot \vec{v} = m_0\gamma^3 \, d\vec{v} \cdot \vec{v}$$

Facendo uso della seguente relazione:

$$d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = d(v^2) = 2\,\vec{v} \cdot d\vec{v}$$

l'equazione del lavoro diventa:

$$dL = \frac{1}{2} m_0\gamma^3 d(v^2) = m_0\gamma^3 v\,dv \qquad (**)$$

Parlando della Quantità di Moto Relativistica si è anche scritto che:

$$d\gamma = \frac{v}{c^2}\gamma^3 dv$$

per cui possiamo ricavare dv:

$$dv = \frac{c^2}{v}\frac{d\gamma}{\gamma^3}$$

A questo punto "conosciamo" l'espressione del lavoro infinitesimo:

$$dL = m_0\gamma^3 \, v \, \frac{c^2}{v}\frac{d\gamma}{\gamma^3} = m_0 \, c^2 \, d\gamma$$

Per ottenere il lavoro necessario per portare una particella da <<ferma: $\gamma = 1$>> ad una data <<velocità v>> (e quindi ad un dato γ) è necessario integrare:

$$L = \int_1^\gamma m_0 c^2 d\gamma = m_0 c^2 \int_1^\gamma d\gamma = m_0 c^2 (\gamma - 1)$$

Possiamo così affermare che l'Energia Cinetica Relativistica E_c è data da:

$$E_c = m_0 c^2 (\gamma - 1)$$

Cosa possiamo dire di questa grandezza?

1) **Per v = 0 è $\gamma = 1$, e quindi $E_c = 0$**
2) **Se $v \to c$ allora $E_c = +\infty$**
   (il che significa che bisogna dargli una quantità di energia infinita per fargli raggiungere la velocità della luce)
3) **Se $v << c$ allora $E_c = (1/2)m_0v^2$**
   (Dall'Analisi Matematica è noto che: $(1+x)^m \cong 1 + mx$ per x "piccolo")

   Quindi: $E_c = m_0c^2(\gamma - 1) = m_0c^2\left(\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right) \cong m_0c^2\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{v^2}{c^2}\right) - 1\right) =$

   $= m_0c^2\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{2}m_0v^2$

Però, ci sarebbe ancora qualche cosa da aggiungere, e questa volta QUALCHE COSA DI MOLTO IMPORTANTE:

ENERGIA RELATIVISTICA

Qui sopra abbiamo appena concluso dicendo che l'Energia Cinetica Relativistica è data da:

$$E_c = m_0c^2(\gamma - 1)$$

Sviluppiamo in prodotto:

$$E_c = m_0c^2\gamma - m_0c^2$$

A destra, il primo termine dipende, tramite γ, dalla velocità, e prende il nome di

ENERGIA RELATIVISTICA TOTALE : $E = m_0c^2\gamma$.

Il secondo termine risulta invece essere una costante, e prende il nome di

ENERGIA RELATIVISTICA A RIPOSO: $E_0 = m_0c^2$.

È quindi possibile scrivere:

$$E = E_c + E_0$$

Non serve sottolineare come l'Energia Relativistica a Riposo

altro non sia che la FORMILA PIU' NOTA DELLA RELATIVITA' IN TUTTO IL MONDO

$$E_0 = m_0c^2$$

e come questo risultato sia

ESCLUSIVAMENTE RELATIVISTICO

e

DI ESSO NELLA FISICA TRADIZIONALE NON COMPAIA TRACCIA.

Al variare dell'energia posseduta da un oggetto: riscaldando l'oggetto, o deformando una molla, cambia anche la massa dell'oggetto stesso.

Il tutto secondo la relazione: $m_0 = \frac{E_0}{c^2}$

Il termine c^2 assume però valori così grandi che gli effetti che ne risultano semplicemente non sono percettibili nella vita quotidiana.

Purtroppo le bombe atomiche rappresentano invece la conferma sperimentale del risultato appena riportato.

Con questa osservazione si conclude l'argomento.