Incontro 12

FINORA ABBIAMO PARLATO DI CINEMATICA: **DESCRIZIONE DEL MOTO**

OGGI PARLIAMO DELLA DINAMICA RELATIVISTICA: **LE CAUSE DEL MOTO**

Come al solito, anche se scriviamo formule cercheremo di spiegarne il contenuto in modo il più possibile intuitivo.

QUANTITA' DI MOTO RELATIVISTICA

Quantità di moto classica: $\vec{p} = m\vec{u}$

Vale la relazione (2° Legge di Newton): $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{u}}{dt} = m\vec{a}$

Questa relazione è valida in quanto la massa "m":

<<quantità di materia che forma la particella/resistenza della particella all'accelerazione>>

viene considerata una costante.

"$\vec{u}$" è la velocità della particella,NON del sistema di riferimento!
Cioè: γ CAMBIA VELOCITA'.

Quantità di moto relativistica: $\vec{p} = m\vec{u}$

Cosa cambia?

Cambia solo in un dettaglio:

"m" non è più una costante, ma risulta essere variabile con la legge:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma m_0$$

Il tutto è stato condizionato dal fatto che la quantità di moto e l'energia dovevano soddisfare a delle condizioni ben precise nel passare da un Riferimento ad un altro.

<<m_0>> è la massa propria della particella, cioè

quella massa che viene misurata in un Riferimento rispetto al quale la massa sta ferma.

Vien quindi dato, per definizione: $\vec{p} = m\vec{u} = \gamma m_0 \vec{u}$

Operando in Meccanica Relativistica, è di conseguenza necessario ricorrere all'espressione:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p} \ ,$$

il che significa sviluppare la derivata

e

vedere cosa salta fuori.

Cioè, l'applicazione di una forza

- **non corrisponde più** solo ad un aumento della velocità,
  bensì
- **corrisponde** anche ad un aumento della quantità di moto,

ed adesso le due cose sono del tutto distinte.

Varia certamente la velocità, ma varia anche il fattore di Lorentz,
ed è questa la grossa differenza fra Meccanica Newtoniana e Relatività.

Svolgiamo i calcoli.
Per semplificare il lavoro, immaginiamo di operare solo nella direzione di un asse.

Differenziando la quantità di moto: $p = mu = \gamma m_0 u$ rispetto a u si ottiene:

$$dp = d(\gamma m_0 u) = m_0 \gamma du + m_0 u d\gamma$$

Per giustificare la scrittura data scriviamo::
$(x+\Delta x)(y+\Delta y) = xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\,\Delta y$
"Trascurando" $\Delta x\,\Delta y$ si può scrivere:
$d(xy) = (x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy = x\Delta y + y\Delta x$
da cui:
$dp = d(\gamma m_0 u) = m_0 \gamma du + m_0 u d\gamma$

Dividendo tutto per "p" si trova:

$$\frac{dp}{p} = \frac{m_0 \gamma du}{p} + \frac{m_0 u d\gamma}{p} = \frac{du}{u} + \frac{d\gamma}{\gamma}$$

Portando $\frac{du}{u}$ a fattore si ottiene:

$$\frac{dp}{p} = \frac{du}{u}\left(1 + \frac{\frac{d\gamma}{\gamma}}{\frac{du}{u}}\right) \qquad (\bullet)$$

Adesso, differenziamo a parte il fattore di Lorentz:

$$d\gamma = d\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right) = d\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(-\frac{2u}{c^2}\right)du = \frac{1}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{u}{c^2}\,du = \frac{u}{c^2}\gamma^3 du$$

Quindi: $\boxed{d\gamma = \frac{u}{c^2}\gamma^3 du}$ **NB: Appare utile ricordare che esiste!!!!**

Moltiplichiamo e dividiamo il risultato per la velocità:

$$d\gamma = \frac{u^2}{c^2}\gamma^3\frac{du}{u}$$

ed infine dividiamo il tutto per γ :

$$\frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{u^2}{c^2}\gamma^2\frac{du}{u}$$

Sostituiamo questo risultato in (•):

$$\frac{dp}{p} = \frac{du}{u}\left(1 + \frac{\frac{d\gamma}{\gamma}}{\frac{du}{u}}\right) = \frac{du}{u}\left(1 + \frac{u^2}{c^2}\gamma^2\right)$$

Ma: $$1+\frac{u^2}{c^2}\gamma^2 = 1+\frac{u^2}{c^2}\frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}} = 1+\frac{u^2}{c^2}\frac{1}{\frac{c^2-u^2}{c^2}} = 1+\frac{u^2}{c^2}\frac{c^2}{c^2-u^2} =$$

$$= 1+\frac{u^2}{c^2-u^2} = \frac{c^2}{c^2-u^2} = \frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}} = \gamma^2$$

Di conseguenza:

$$\frac{dp}{p} = \gamma^2\frac{du}{u}$$

Isoliamo $\frac{du}{u}$ **:** $$\frac{du}{u} = \frac{1}{\gamma^2}\frac{dp}{p}$$

E' stato così possibile dimostrare che il lavoro appena fatto porta – assieme alla definizione di quantità di moto relativistica - a scrivere in definitiva:

$$\frac{du}{u} = \frac{1}{\gamma^2}\frac{dp}{p}$$

Cioè:

l'aumento relativo della velocità è di un fattore $\frac{1}{\gamma^2}$ **volte l'aumento relativo della quantità di moto relativistica.**

In particolare, questo significa che, quando u si approssima a c, è:

$$\frac{1}{\gamma^2} \to 0\ ,$$

per cui l'incremento della velocità tende a zero.
Il tutto, in accordo con il fatto che c rappresenta il limite massimo delle velocità ammissibili.

Principio di conservazione della quantità di moto.
Teniamo presente la definizione di <<quantità di moto>> relativistica:

$$\vec{p} = m\vec{u} = \gamma m_0\vec{u}$$

Nel caso di un sistema costituito da due corpi che interagiscono fra loro, il principio di conservazione della quantità di moto ci impone di scrivere:

$$\overrightarrow{p_{1,i}} + \overrightarrow{p_{2,i}} = \overrightarrow{p_{1,f}} + \overrightarrow{p_{2,f}}$$ **(i: iniziale : f: finale)**

Essendo l'equazione scritta una equazione vettoriale, questo implica che si dovrebbero trattare separatamente le singole componenti lungo ciascuno degli assi.

Per semplicità, analizziamo un esempio rappresentativo uni-dimensionale.

Consideriamo un asteroide , inizialmente fermo, che esplode in due pezzi:

il primo: di massa propria m_1 : 2900 Kg,
che procede in una direzione con velocità 0,63c

il secondo: di massa propria m_2 : 1700 Kg

Si cerca la velocità di questo secondo pezzo di asteroide.

L'asteroide inizialmente è fermo $\Rightarrow$ quantità di moto iniziale è nulla.
Tale deve essere, quindi, la quantità di moto finale.

Ne deriva che, se il primo pezzo è partito in una data direzione con velocità u_1, il secondo deve essere partito in direzione esattamente opposta con velocità u_2.
Consideriamo v_1 positiva e v_2 negativa, e scriviamo:

$$0 = p_{1,f} - p_{2,f}$$

$$\Rightarrow \quad p_{1,f} = p_{2,f}$$

$$p_{1,f} = m_2 \gamma u_2 = m_2 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} u_2$$

$$p_{1,f} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = m_2 u_2$$

$$p^2{}_{1,f} \left(1 - \frac{u_2^2}{c^2}\right) = m^2{}_2 u^2{}_2$$

$$p^2{}_{1,f} - \frac{u_2^2}{c^2} p^2{}_{1,f} = m^2{}_2 u^2{}_2$$

$$p^2{}_{1,f} c^2 - u_2^2 p^2{}_{1,f} = m^2{}_2 u^2{}_2 \, c^2$$

$$u_2^2 = \frac{p^2{}_{1,f} c^2}{p^2{}_{1,f} + m^2{}_2 \, c^2}$$

$$u_2 = \frac{p_{1,f} c}{\sqrt{p^2{}_{1,f} + m^2{}_2 \, c^2}}$$

A questo punto è sufficiente conoscere $p_{1,f}$ per trovare v_2:

$$p_{1,f} = m_1 \gamma u_1 = m_1 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}} u_1 = 7,06 \ \frac{\text{Kg m}}{\text{s}}$$

Il calcolo di u_2 permette allora di scrivere:

$$u_2 = \frac{p_{1,f} c}{\sqrt{p^2{}_{1,f} + m^2{}_2 \, c^2}} = 0,81 \ c$$

NB: come previsto, si ottiene $u_2 < c$.

In Meccanica Classica si sarebbe ottenuto:
$m_1 u_1 = m_2 u_2 \Rightarrow u_2 = (m_1/m_2) u_1 = 1,14 \ c > c$!!!!!!

E qui ci fermiamo.