Quantità di moto relativistica

Quantità di moto newtoniana: $\vec{p} = m\,\vec{u}$

Secondo Newton "è" conservata, soprattutto pensando ad "m" come ad una costante.

Tenendo conto dei Postulati di Einstein, la Quantità di moto relativistica deve invece avere la forma:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \gamma m\vec{u}$$

NB: **Si osservi che si viene usata la velocità della particella, NON del "sistema di riferimento", chiamata "$\vec{v}$".**

"m" è la "massa propria" della particella, misurata da un osservatore in quiete rispetto alla particella stessa.

La formula relativistica della 2° Legge di Newton è quindi:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m\vec{u})$$

Questa espressione è ragionevole perché

- **preserva la Meccanica Classica nel caso** $u << c$.
- **la Quantità di moto di un sistema isolato** ($\vec{F} = 0$) **viene conservata sia classicamente che relativisticamente.**

L'accelerazione relativistica "a" della particella decresce sotto l'azione di una forza costante applicata nella direzione di "u" secondo la legge:

$$a = \frac{F}{m}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

Da questa formula si deduce che, quando "u" tende a "c", l'accelerazione è "zero", cioè: nessun mobile può superare la velocità della luce nel vuoto.

Energia relativistica

Abbiamo visto che la Quantità di moto relativistica richiede di essere corretta.

Lo stesso accade per il teorema del Lavoro-Energia.

Nell'ipotesi che i moti avvengano tutti con moto lungo l'asse "x", si risparmia di dover mettere i segni dei vettori, ma i risultati che si ottengono hanno validità generale.

Lavoro: $W = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dp}{dt}\,dx$ $\qquad$ $\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m\vec{u})}$

Ma: $\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{mu}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m\left(\frac{du}{dt}\right)}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}$

Sostituendo questa espressione per $\frac{dp}{dt}$ e scrivendo: $dx = u\,dt$ si ottiene:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \frac{m\left(\frac{du}{dt}\right) u\,dt}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} = m\int_0^u \frac{u\,du}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

dove si assume che la particella sia accelerata dalla quiete fino ad una qualche velocità finale "u".

Valutando l'integrale noi troviamo che:

$$W = \frac{m c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - m c^2$$

Ricordiamo che il lavoro fatto da tutte le forze che agiscono sulla particella uguagliano le variazioni di energia cinetica della particella.

Poiché siamo partiti dicendo che l'energia cinetica iniziale è "zero", si conclude dicendo che il lavoro W è uguale all'energia cinetica K.

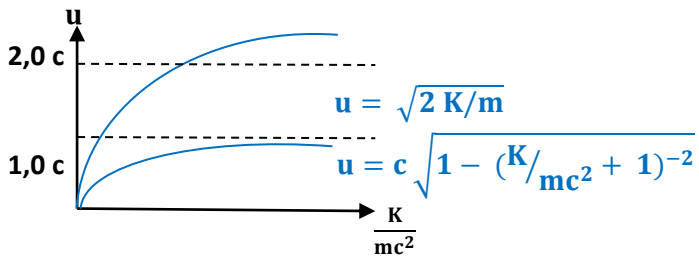
Cioè: $$K = \frac{m c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - m c^2$$

A basse velocità: $\frac{u}{c} << 1$, l'equazione scritta si riduce alla classica espressione:

$$K = \frac{1}{2} m u^2$$ (basta sviluppare $1/\sqrt{(1-x^2)}$ in serie, e si trova)

il che, come deve essere, è conforme al risultato classico.

Il grafico che segue confronta le espressioni "relativistiche" e "non relativistiche" per la funzione K.



Nel caso relativistico "u" è sempre minore di "c".

Appare istruttivo scrivere la formula della energia cinetica nella forma:

$$K = \gamma mc^2 - mc^2 \qquad \text{essendo:} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

Il termine costante mc^2, che è indipendente dalla velocità, è chiamato "rest energy" della particella.

Il termine γmc^2, che dipende dalla velocità della particella, è quindi la somma di K e di mc^2.

Definiamo $E = \gamma mc^2$ come la "energia totale della particella", e si scrive:

$$E = \gamma mc^2 = K + mc^2$$

La espressione $E = \gamma mc^2$ è la famosa equivalenza massa-energia di Einstein, dove si mostra che la massa è una misura della energia totale espressa in tutte le forme.

Questo concetto ha semplicemente rivoluzionato il campo della Fisica Nucleare.

In molte situazioni la quantità di moto e l'energia di una particella sono misurate al posto della velocità.
Appare quindi utile avere una espressione che mette in relazione l'energia "E" con la quantità di moto relativistica "p".
Questo si ottiene ricordando che: $E = \gamma mc^2$ e che: $p = \gamma mu$.
Elevando al quadrato e sottraendo è possibile eliminare "u" e scrivere:

$$E^2 = p^2c^2 + (mc^2)^2$$

Quando la particella è in quiete è $p = 0$, e si ha: $E = mc^2$.

Nel caso particolare di "massa 0" si ha: $E = pc$.
Questa equazione è "esattamente" l'espressione che mette in relazione energia e quantità di moto per i fotoni, che viaggiano sempre alla velocità della luce.

Infine è da notare che, poiché la massa "m" è da considerare "costante" (indipendente dal suo moto), "m" deve avere lo stesso valore per tutti i sistemi di riferimento inerziali.
D'altra parte l'energia totale "E" e la quantità di moto "p" dipendono dal sistema di riferimento in cui sono misurati, perché ambedue dipendono dalla sua velocità.
La quantità $(E^2 - p^2c^2)$ deve quindi avere lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento, e quindi deve essere una invariante sotto una Trasformazione di Lorentz.

Massa come misura di energia

L'equazione $E = \gamma mc^2$, applicata ad una particella, suggerisce che, anche se ferma ($\gamma = 1$), questa possiede una enorme quantità di energia tramite la sua massa.
A causa di questa convertibilità non possiamo accettare più a lungo che massa ed energia siano costanti separatamente, ma è necessario parlare di conservazione della massa-energia come di un tutto unico.
Detto in modo semplice, questa legge richiede che la somma di massa-energia di un sistema di particelle prima e dopo una loro interazione sia una costante.
Ovviamente, se abbiamo "n" particelle, e ciascuna di queste ha una massa-energia pari a:

$$E_i = \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - \frac{u_i^2}{c^2}}}$$

la massa-energia totale deve essere la somma di tutte le masse-energia parziali.

E qui ci fermiamo.