Incontro 09

DESCRIZIONE DI MINKOWSKI

Minkowski era un ex-insegnante di Einstein, ed ha contribuito dando alla Teoria della Relatività Ristretta una forma matematicamente ineccepibile.

Ha infatti introdotto i tetra-vettori (o quadrivettori), i vettori a 4 dimensioni che riescono a descrivere il mondo relativistico.

COMINCIAMO A PARLARE DEI "VETTORI NORMALI", A 3 DIMENSIONI.

Di solito vengono presentati dando la loro "intensità" e "direzione" (si pensi p.es. ad una forza, o ad una velocità).

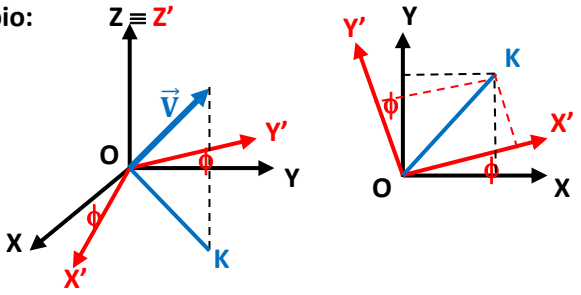
Ma non basta.

Dato un Sistema di Riferimento, di un vettore si danno le componenti, ma …. nel processo fisico quello che conta è il vettore, non il Riferimento che in quel momento sembra comodo.

Il Riferimento è un "accidens", qualche cosa di molto utile ma "estraneo" al processo fisico che si esamina.

Al variare del sistema di riferimento varia la descrizione che viene data del fenomeno, ma il fenomeno fisico rimane lo stesso.

Facciamo un esempio:



Ruotando gli assi di un angolo ϕ attorno all'asse Z ottengo, sempre per lo stesso vettore $\vec{V}$:

- **che la componente verso Z rimane inalterata: Z = Z'**
- **che le componenti verso X e Y e quelle verso X' e Y' sono legate fra loro dalle relazioni:**

$$X' = X\cos\phi + Y\,\mathrm{sen}\phi$$

$$Y' = -X\,\mathrm{sen}\phi + Y\cos\phi$$

Scritta in linguaggio matriciale si ha:

$$\begin{Bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \mathrm{sen}\phi & 0 \\ -\mathrm{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}$$

dove:

- **qualunque sia l'angolo ϕ vale la relazione: $\mathrm{sen}^2\phi + \cos^2\phi = 1$**
- **il prodotto scalare fra due vettori arbitrari è una costante (tridimensionale):**

$$\vec{A}\bullet\vec{B} = A_X B_X + A_Y B_Y + A_Z B_Z = A'_X B'_X + A'_Y B'_Y + A'_Z B'_Z$$

- **e, di conseguenza, è costante anche la lunghezza del vettore:**

$$|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A}\bullet\vec{A}} = \sqrt{A_X A_X + A_Y A_Y + A_Z A_Z} = \sqrt{A_X^2 + A_Y^2 + A_Z^2}$$

- **il prodotto vettoriale di due vettori è un vettore (cioè si trasforma secondo le regole vettoriali).**

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_X & A_Y & A_Z \\ B_X & B_Y & B_Z \end{vmatrix}$$

INTRODUCIAMO, A QUESTO PUNTO, I TETRA-VETTORI DI MINKOWSKI

In questo caso gli "eventi" sono individuati da una componente spaziale (x, y, z) e da una componente temporale t.
A differenza della Meccanica classica, la Relatività "lega" tutte e 4 le componenti suddette con le Relazioni di Lorentz.
Non solo, ma esistono tre tipi di eventi:

- **gli eventi che richiedono di muoversi con velocità inferiore a quella della luce (time-like vectors)**
- **gli eventi che richiedono di muoversi con velocità uguale a quella della luce: LA LUCE STESSA.**
- **gli eventi che richiedono di muoversi con velocità superiore a quella della luce (space-time vectors)**

Per tutti e tre questi eventi esiste una grandezza:

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 * \Delta t^2$$

che risulta essere costante per tutte le Trasformazioni di Lorentz.

In particolare, nel caso della luce nel vuoto è: $\Delta s^2 = 0$, ed è invariabile per il secondo postulato di Einstein .

L'espressione "assomiglia" a quella della "distanza" in campo euclideo, ma il segno "-" ci dice che la Relatività Ristretta è uno spazio NON EUCLIDEO.

Prendendo in esame le coordinate spaziali, queste sono espresse in metri, mentre la coordinata temporale è espressa in unità di tempo.
Questo fatto non è assolutamente favorevole: lo stesso fenomeno è descritto da coordinate non omogenee.
È scomodo, ed è per questo che si preferisce scegliere come coordinate: x, y, z, ct.
Tutte e quattro le unità sono espresse in metri.

Rimane un fatto: il segno "-" davanti a "$c^2\Delta t^2$".

Se si assumono - per rappresentare un evento - le coordinate: (x y, z, ict), essendo "i" l'unità immaginaria ($i^2 = -1$), allora l'espressione che dà il Δs^2 è formata dalla somma dei quadrati degli intervalli di queste quattro coordinate.

Ebbene, Minkowski ha fatto proprio questa scelta.

Al vettore (x, y, z, ict) vien dato il nome di <<tetra-vettore di posizione>>, e viene assunto come "esempio" di che cosa si intende per tetra-vettore.

Un insieme di quattro numeri: (A_1, A_2, A_3, A_4) sarà un tetra-vettore se, al cambiare del Riferimento, le sue coordinate cambieranno in accordo con le Relazioni di Lorentz:

$$A_1' = \gamma(A_1 + i\beta A_4)$$
$$A_2' = A_2$$
$$A_3' = A_3$$
$$A_4' = \gamma(-i\beta A_1 + A_4)$$

Tradotto in linguaggio tensoriale si scrive:

$$\begin{Bmatrix} A_1' \\ A_2' \\ A_3' \\ A_4' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix}$$

Indicando il tetra-vettore (A_1, A_2, A_3, A_4) con il simbolo: $\underline{A}$, è possibile dimostrare che:

- **il prodotto scalare di due tetra-vettori $\underline{A} \bullet \underline{B}$ è un tetra-scalare**
- **e che – di conseguenza - è possibile definire la lunghezza di un tetra-vettore:**

$$|\underline{A}| = \sqrt{\underline{A} \bullet \underline{A}}$$

Nasce così il calcolo vettoriale d Minkowski.

Se, anziché mettere la coordinata temporale al quarto posto la mettiamo al primo, facendola seguire dalle coordinate spaziali, possiamo scrivere:

$$\begin{Bmatrix} A_1' \\ A_2' \\ A_3' \\ A_4' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -i\beta\gamma & 0 & 0 \\ i\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix}$$

da cui si osserva che: $(\gamma)^2 + (-i\beta\gamma)^2 = (\gamma)^2(1-\beta^2) = 1$.
Il risultato "assomiglia molto" alle conseguenze della rotazione che abbiamo fatto nel caso di vettori tridimensionali.
Da qui tutto un discorso riguardante le funzioni iperboliche, che sostituiscono le funzioni trigonometriche che troviamo nel caso tridimensionale.
Ma noi ci fermiamo qui.