Le geometrie non euclidee

Il quinto postulato di Euclide

Geodetica

Geometria non euclidea ellittica

Geometria non euclidea iperbolica

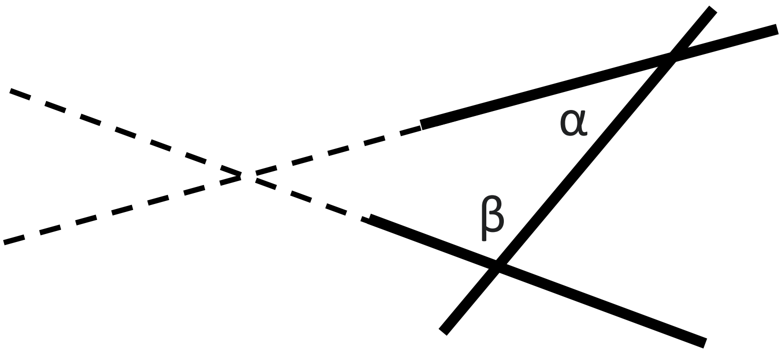
A cura di Bruno Pizzamei

Sul quinto postulato

La geometria definita non euclidea si costruisce su principi che non accettano e negano alcuni postulati di Euclide, nello specifico quelli che riguardano le rette parallele, contenuti nel V postulato.

Riportiamo il concetto espresso dal **V postulato di Euclide**:

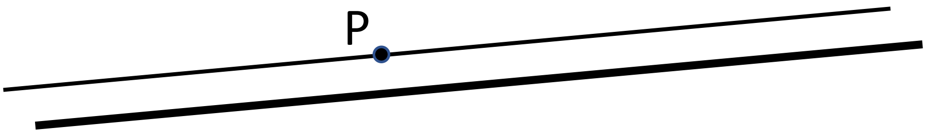
Se una retta che taglia altre due rette determina dallo stesso lato angoli interni la cui somma è minore di due angoli retti, prolungando le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove i due angoli hanno somma minore di due retti.



$\alpha + \beta < 180°$

Dando una definizione più moderna il V postulato diventa

all'interno di un piano, si afferma che esiste una sola retta che passa attraverso un punto esterno assegnato che risulti parallela ad una retta anch'essa assegnata.



Dal suddetto postulato deriva il teorema che riportiamo:

la somma degli angoli all'interno di un triangolo è di 180°.

Geodetica

Prima di proseguire introduciamo ora la nozione di **geodetica**. Nel piano il percorso più breve che unisce due punti si trova sulla retta passante per i due punti. Estendendo questo concetto alle superfici, il percorso più breve che unisce due punti della superficie si trova su di una linea, generalmente curva, detta geodetica.

Ad esempio, dovendosi muovere sulla superficie di una sfera, il percorso più breve non è quello rettilineo, perché non esistono percorsi di questo tipo, ma è l'arco di cerchio massimo, che in questo caso è una geodetica.

Geometria non euclidea ellittica

Nel corso del 1854 **Bernhard Riemann**, elaborando le sue teorie in merito alla geometria, espose le sue considerazioni in riferimento ad un possibile ulteriore postulato geometrico che afferma quanto segue:

attraverso un punto situato all'esterno di una retta assegnata non si riscontra nessuna retta parallela.

Pertanto, per quanto affermato, ne consegue questo teorema:

la somma degli angoli all'interno di un triangolo è superiore a 180°.

Nel caso della **geometria ellittica** o di Riemann, utilizziamo come riferimento una sfera al posto del piano e convertiamo le forme geometriche proprie del piano nelle forme geometriche equivalenti proprie della superficie sferica.

Il **piano** nella geometria ellittica è costituito da una **superficie sferica**: i **punti** di tale piano sono le **coppie di punti diametralmente opposti** e le **rette** sono le **circonferenze massime** tracciate sulla sfera. La geometria ellittica è la geometria cui fa riferimento Einstein nella sua teoria della relatività.

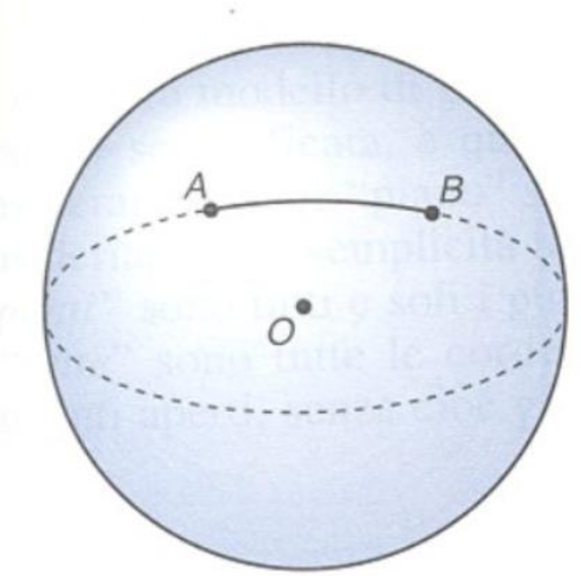
Le linee curve possiedono infatti lo stesso carattere distintivo delle linee rette, in quanto rappresentano le linee più corte che uniscono due punti identificati su una superficie.

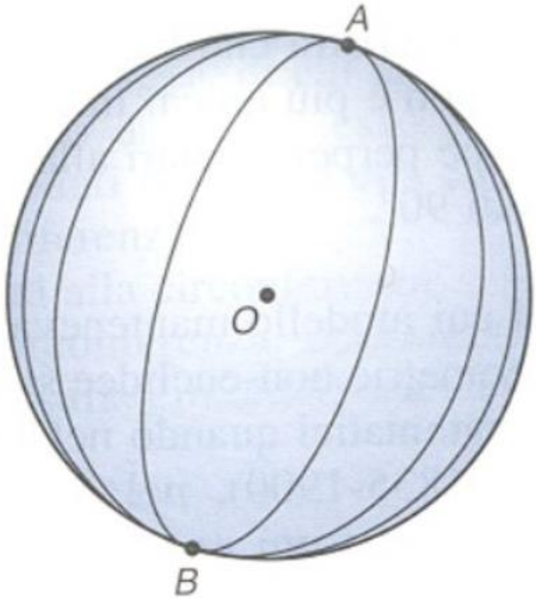
In questo caso le geodetiche rappresentano le circonferenze con il massimo diametro, ovvero le circonferenze risultanti dall'intersezione di un piano che passa al centro della superficie sferica.

Un facile esempio per chiarire il concetto possono essere l'equatore ed i meridiani.

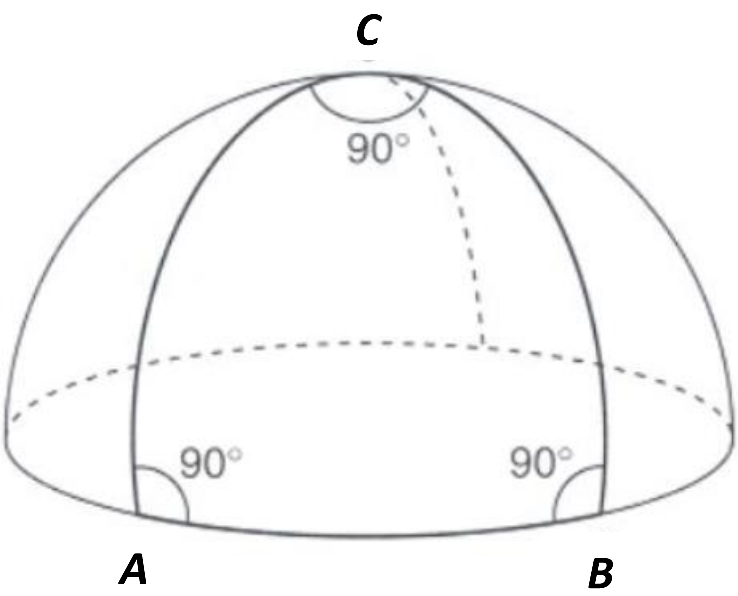
In una sfera non troviamo linee curve che non abbiano punto di incontro, pertanto non abbiamo linee parallele.

Una rappresentazione esemplificative è quella dove si individuano due meridiani in posizione di perpendicolarità rispetto all'equatore e che hanno punto di incontro perpendicolare al polo Nord.

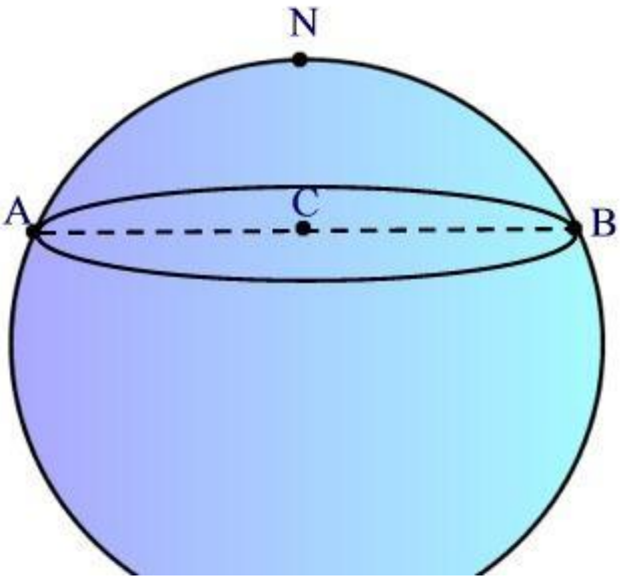




É evidente che in un triangolo ABC, delimitato da linee curve, troviamo una somma degli angoli interni di 270°.



Pertanto si può affermare che questa tipologia di triangolo presenta una somma degli angoli interni superiore a 180°, ma ciò non è un fattore comune ad ogni triangolo.



Altro elemento che caratterizza questa geometria è il rapporto tra la circonferenza ed il raggio che è inferiore alla costante matematica detta **π** cioè **Pi greco**.

Ricordiamo infatti che, essendo sulla superficie di una sfera, la circonferenza con diametro AB trova il centro nel punto N e non nel punto C, che invece è un punto situato all'interno della sfera.

Come è chiaro che l'arco denominato AN è più grande del segmento denominato AC, il rapporto tra la circonferenza definita AB e il raggio corrispondente detto AN è inferiore a π.

Geometria non euclidea iperbolica

Successivamente, nel 1829 gli studiosi **Lobacevskij** e **Bolyai** elaborarono una teoria geometrica che si definisce **iperbolica** e che si conferma in linea con quella esposta da Euclide che esprime quanto segue:

attraverso un punto esterno ad una retta assegnata, sussistono più rette parallele; se si riscontrano più di una retta, significa che ce ne sono una quantità infinita.

Su base di quanto sopra esposto, si deduce quanto segue:

la somma degli angoli presenti all'interno di un triangolo è inferiore a 180°

Realizzare invece un esempio chiaro e funzionale a livello didattico per rappresentare la **geometria iperbolica** di Lobacevskj risulta più difficile, non esistendo un esempio rappresentativo per questa geometria.

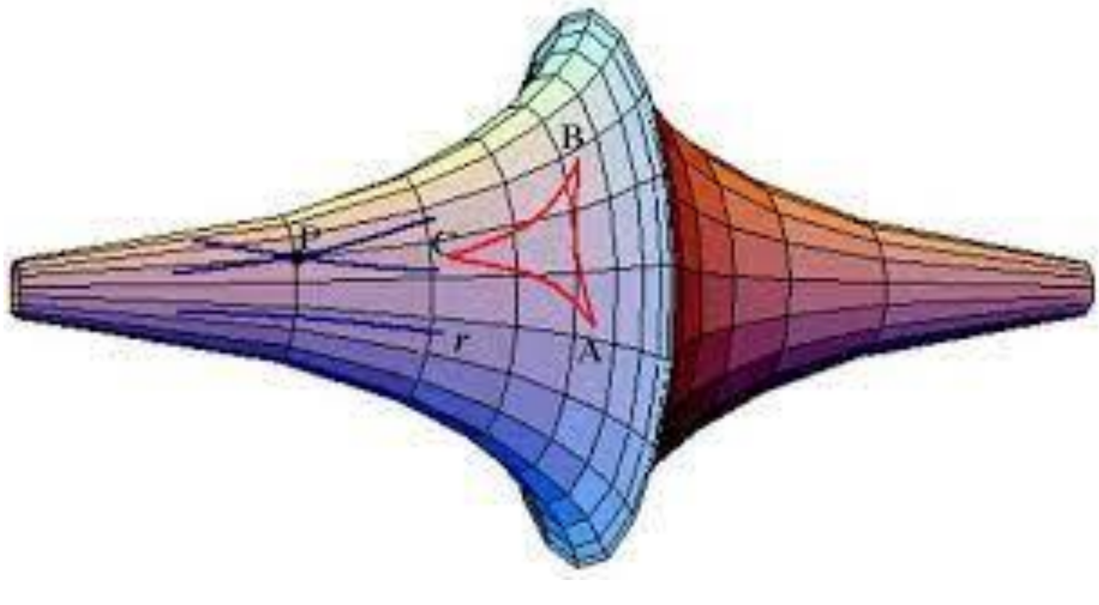
Possiamo immaginare una superficie denominata **pseudosfera**, proposta come esempio per la geometria iperbolica con curvatura costante in ogni punto, e con forma che ricorda una sella.

Il **piano** è costituito dalla pseudosfera, il **punto** è un punto sulla **pseudosfera, la retta** è una **linea geodetica** sulla pseudosfera.

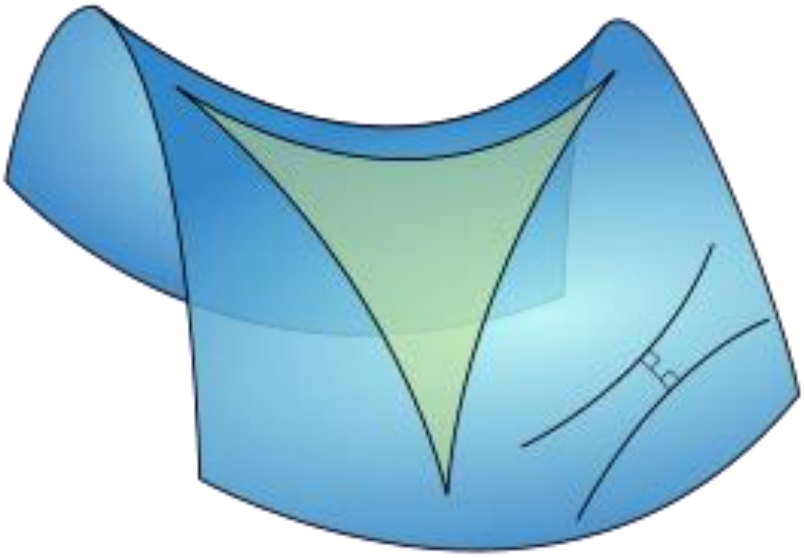
Il triangolo formato da curve denominato ABC costruito sulla pseudosfera corrisponde esattamente a un triangolo formato da linee rette sul piano euclideo, perché è composto da linee geodetiche.

In questo triangolo la somma degli angoli interni è in funzione della sua grandezza ed è inferiore a 180°.

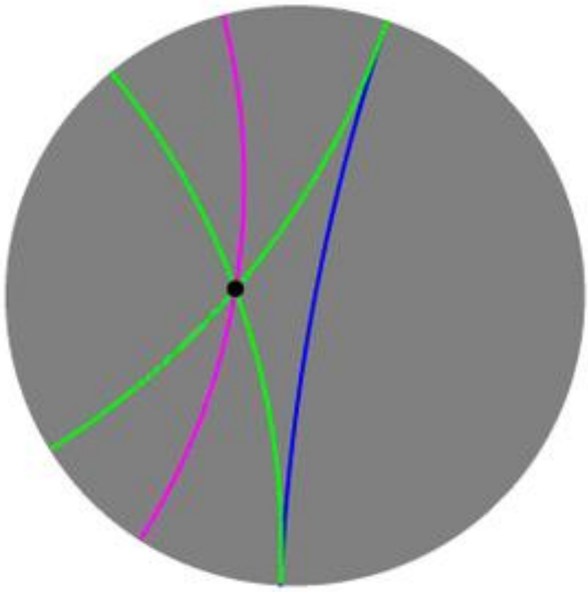
Possiamo affermare che attraverso il punto denominato P, situato fuori dalla curva R, passano più linee curve dette p1 e p2, che non hanno mai punto di incontro con la curva R, e pertanto ad essa parallele.



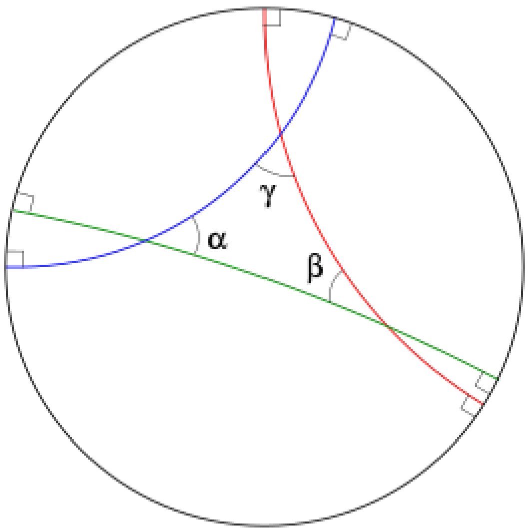
Nella geometria iperbolica, le rette parallele generalmente *"divergono"* e gli angoli interni di un triangolo sono più piccoli che nella geometria euclidea.



Questo è quanto accade ad esempio per le geodetiche su una superficie a forma di sella come questa.



Dati una retta (qui in blu scuro) e un punto disgiunti, esistono almeno due rette passanti per il punto che non incrociano la retta. In verità ce ne sono infinite: qui ne sono disegnate tre.



In geometria iperbolica, la somma $\alpha + \beta + \gamma$ degli angoli interni di un triangolo è minore di π (o 180°).

Geometria e realtà.

Le geometrie non euclidee come sistemi formali ipotetici deduttivi sono compatibili alla stessa stregua della geometria euclidea.

All'inizio sembrava che queste geometrie non potessero avere alcun riscontro reale. Nel migliore dei casi potevano rappresentare un elegante esercizio mentale.

Può sorgere allora la domanda: quale geometria è da preferire per la descrizione del mondo fisico?

Bisogna ricordare che con l'esperienza non si può decidere se esistono **una** o **più d'una** o **nessuna retta** passante per un **punto** e **parallela a una retta data**.

La scelta tra le geometrie, euclidee e non euclidee, deve essere fatta in funzione della semplicità e della convenienza.

È giustificato quindi la scelta della geometria euclidea, quando si considerano distanze opportunamente piccole, ma non si deve aspettare che essa possa descrivere la realtà per distanze più grandi.

Può essere fatta in questo punto, una analogia con la fisica di Newton e la fisica di Einstein.

La prima descrive la realtà con sufficiente approssimazione quando vengono considerate velocità molto minori della velocità della luce. Per velocità prossime a quest'ultima è la fisica relativistica può più facilmente descrivere la realtà.

Pensiamo allora come esempio ai problemi connessi alla navigazione marittima e aerea.

Come possiamo definire la forma del nostro pianeta?

La Terra ha una forma approssimativamente sferica, con un rigonfiamento equatoriale e uno schiacciamento polare. La forma della Terra è stata influenzata in particolare dall'azione della forza centrifuga, determinata dal suo moto di rotazione. La Terra ha un campo gravitazionale ed esercita una forza di gravità.

Si dice che la Terra è un **geoide**, solido che per definizione ha la **forma della Terra**.

Un geoide è molto simile ad un ellissoide, solido generato dalla rotazione di un'ellisse attorno ad un suo asse, rispetto al quale il geoide ha uno scostamento massimo di 100 metri.

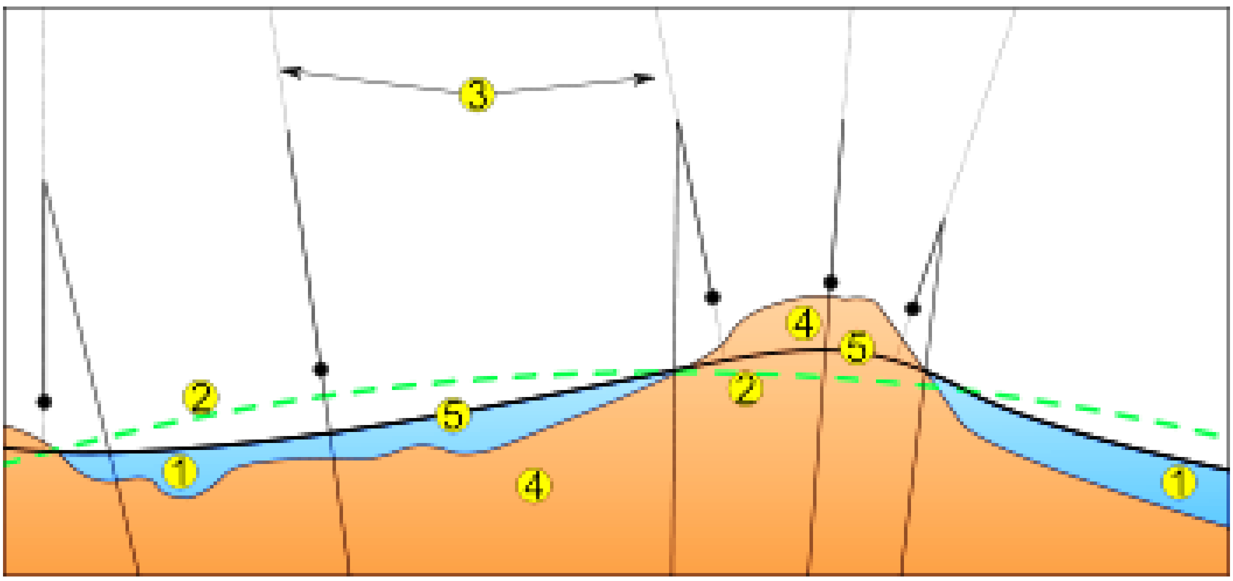
Il matematico tedesco J.B.Listing nel 1873, definì il **geoide** come la superficie di livello della Terra, cioè la superficie che passa per il livello medio del mare in ogni suo punto, ed estesa idealmente anche sotto i continenti.

La superficie del geoide, in ogni suo punto, è perpendicolare alla verticale di quel punto, identificata dal filo a piombo, cioè alla direzione della forza di gravità. Il piano tangente al geoide in un suo punto è l’orizzonte di quel punto.

La forma del geoide è molto irregolare perché dipende dalla presenza di montagne, valli e masse rocciose di diversa densità che modificano la direzione della verticale e l’inclinazione della superficie di un liquido in quiete.

In ogni caso la forma del geoide segue, con depressioni e rigonfiamenti, le depressioni e i rigonfiamenti della superficie fisica della Terra, anche se in modo meno accentuato.

Il geoide non consente una definizione matematica. Per questo motivo, ai fini cartografici, si ricorre ad una sua approssimazione e cioè all’ ellissoide che ha una forma matematica. Se la Terra fosse costituita da materiali perfettamente omogenei, l'ellissoide e il geoide coinciderebbero; in realtà essi risultano, come si diceva, sfasati di alcune decine di metri.



1.Oceano

2.Ellissoide

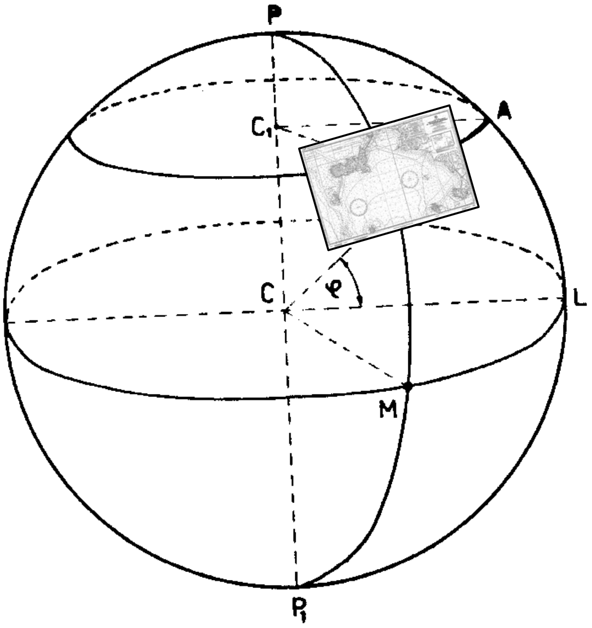
3.Filo a piombo

4.Continente,

5.Geoide

Il concetto pitagorico di una Terra sferica, che prese il posto di precedenti credenze in una Terra piatta, offre una superficie semplice, quella della sfera, che è matematicamente facile da trattare.

Molti calcoli astronomici e nautici lo usano come superficie che rappresenta la Terra perché il geoide può essere con buona approssimazione sostituito da una sfera.



Ritorniamo ora ai problemi connessi alla nautica che è l'insieme delle conoscenze, delle tecniche e dei mezzi relativi al trasporto sull'acqua, per qualsiasi scopo esso sia perseguito.

In navigazione per distanze piccole si opera su un piano euclideo tangente alla sfera.

Per distanze maggiori si risolvano triangoli sferici utilizzando la trigonometria sferica.

$\alpha + \beta + \gamma > 180°$

Il triangolo sferico è un triangolo tracciato sulla sfera e che ha per lati archi di circonferenza massima. È sferico sulla Terra il triangolo che ha per vertice il polo e due punti situati sull’equatore e che ha per lati due archi di meridiano e un arco di equatore.

Ecco che sarà allora la geometria non euclidea ellittica a descrivere questo modello di realtà.

L'importanza rivoluzionaria delle geometrie non euclidee consiste nel fatto che esse demoliscono le opinioni che postulati di Euclide costituissero l'ossatura matematica immutabile a cui dovesse adattarsi la nostra conoscenza sperimentale della realtà fisica.

Risulta invece più opportuno in certi campi della fisica seguire una descrizione non euclidea dei fenomeni.

Nella teoria della relatività generale di Einstein, la luce si propaga lungo delle geodetiche, in questo caso la geometria di Riemann è la geometria più opportuna.