

I frattali

Alcune definizioni sulle trasformazioni geometriche

Che cos'è un frattale

Alcuni esempi di frattali

La curva di Koch

Il triangolo di Sierpiński

Dimensione frazionaria nei frattali

I frattali e la natura

Alcune caratteristiche dei frattali

La funzione di Weierstrass

Frattali, proporzione aurea e numeri di Fibonacci

Conclusioni

A cura di Bruno Pizzamei

I frattali

Alcune definizioni sulle trasformazioni geometriche

Una **trasformazione geometrica piana** è una **corrispondenza biunivoca** del piano con sé stesso che conserva qualche proprietà geometrica del piano, associando a ogni punto del piano un punto del piano stesso. In altre parole, per trasformazione geometrica piana si intende un'applicazione dei punti del piano in punti dello stesso piano che risulti invertibile e che non modifichi determinati elementi del piano o determinate funzioni dei punti del piano. Si può anche definire come una funzione biiettiva del piano in sé.

Un' **omotetia** (composto dai termini greci *omos*, "simile" e *tithemi*, "pongo") è una particolare trasformazione geometrica del piano o dello spazio, che dilata o contrae gli oggetti, mantenendo invariati gli angoli ossia la forma (nel senso intuitivo del termine).

Un' **isometria** è una qualsiasi trasformazione geometrica nel piano o nello spazio che mantiene inalterate le caratteristiche misurabili di una figura come le misure dei lati, le ampiezze degli angoli. Il perimetro, l'area e il volume. Si può dire che conserva le distanze: comunque si scelgano due punti distinti A e B la distanza AB è uguale alla distanza A'B', dove A' e B' sono i punti immagini nella trasformazione.

Una **similitudine** è una trasformazione geometrica nel piano o nello spazio che conserva i rapporti tra le distanze. Intuitivamente mantiene inalterata la forma degli oggetti cambiandone la posizione, l'orientazione o la grandezza. Due figure simili hanno la stessa forma

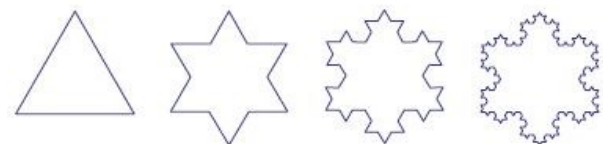
In altri termini, presi due qualsiasi punti distinti del piano (o dello spazio) A, B, una similitudine è una corrispondenza biunivoca che associa ai punti A e B i punti A' e B' tali che il rapporto tra le lunghezze dei segmenti A'B' e AB sia costante. In formule

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = k$$

k è un numero reale positivo e non nullo e prende il nome di **rapporto di similitudine**.

Che cos'è un frattale

Un frattale è una figura geometrica che si ripete all'infinito uguale a sé stessa, su scala sempre più piccola. Ciò significa che una parte qualsiasi del frattale riproduce, in piccolo, la figura nella sua totalità e in tutti i suoi dettagli. Per chiarire il concetto, vedremo due esempi: il *fiocco di neve di von Koch* e il *triangolo di Sierpinski*.



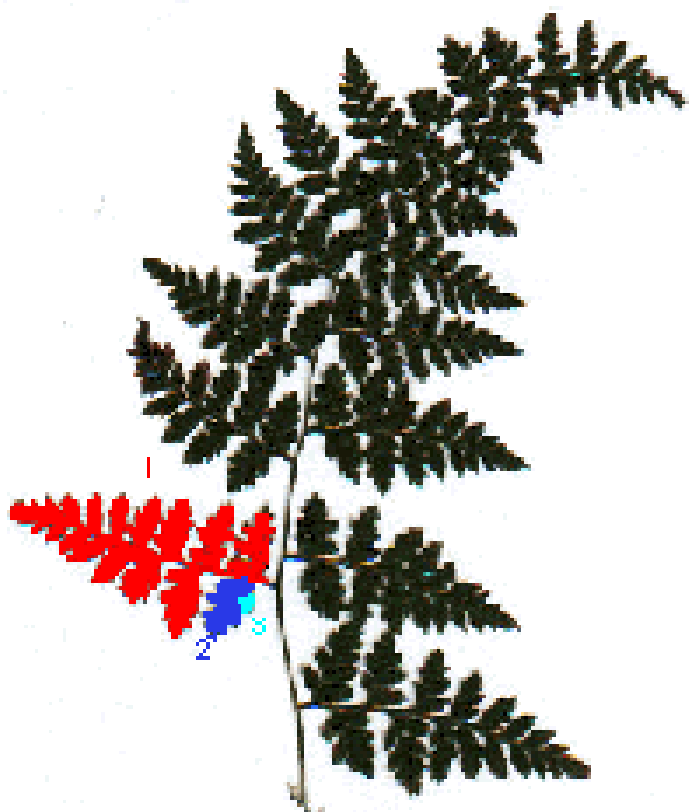
il *fiocco di neve di von Koch*



il *triangolo di Sierpinski*.

La felce e la autosimilarità

Le figure schematiche, presentate per illustrare le caratteristiche dei frattali, non rendono l'idea della complessità e della bellezza di questi oggetti geometrici.



I frattali oggi interessano i più diversi campi di ricerca e persino l'arte figurativa e la musica: grazie all'uso dei computer, le formule matematiche che definiscono i frattali possono essere trasformate in immagini e in suoni. Negli anni Ottanta si è sviluppata la geometria dei *frattali biomorfi*, cioè simili a oggetti presenti in natura, il cui risultato più noto è *la foglia di felce*, un frattale che riproduce con incredibile somiglianza una vera foglia di felce.

Consideriamo una comune felce. La cosa che si nota immediatamente è che una parte della felce è simile a tutta la felce stessa, ovvero è una copia in piccolo della foglia completa.

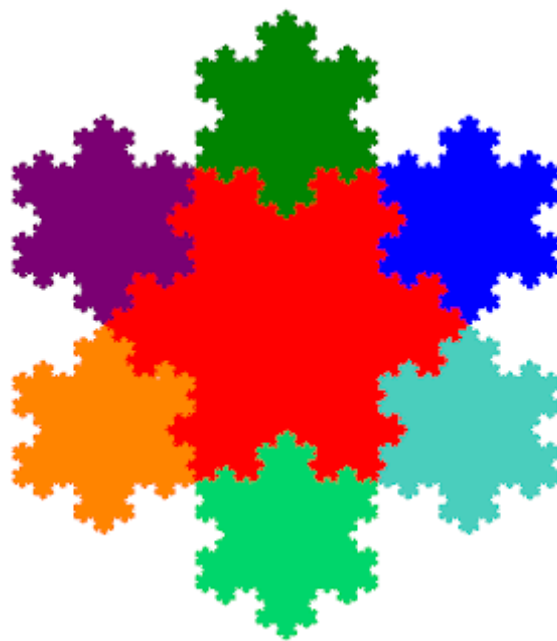
Ed allo stesso modo si può procedere innumerevoli volte fino a ridursi a parti sempre più piccole. Nella figura accanto sono evidenziati i primi tre passi di questo confronto. La parte evidenziata in **rosso** è la copia in piccolo dell'intera foglia. La parte evidenziata in **blu** a sua volta è la copia ridotta della parte in rosso. Infine la parte **celeste** è la copia ridotta della parte blu e così via.

"Questa proprietà prende il nome di **autosimilarità** (o autosomiglianza): una parte dell'oggetto è simile al tutto" ("La geometria e la natura | elianabarzaghi")

In matematica, un oggetto **autosimile** è esattamente o approssimativamente simile a una sua parte (cioè una o più delle sue parti è internamente omotetica al tutto).

Molti oggetti nel mondo reale, come ad esempio le coste, sono statisticamente autosimili: parti di questi oggetti mostrano le stesse proprietà statistiche a molte scale. L'auto-similarità è una proprietà tipica dei frattali

La Curva di Koch



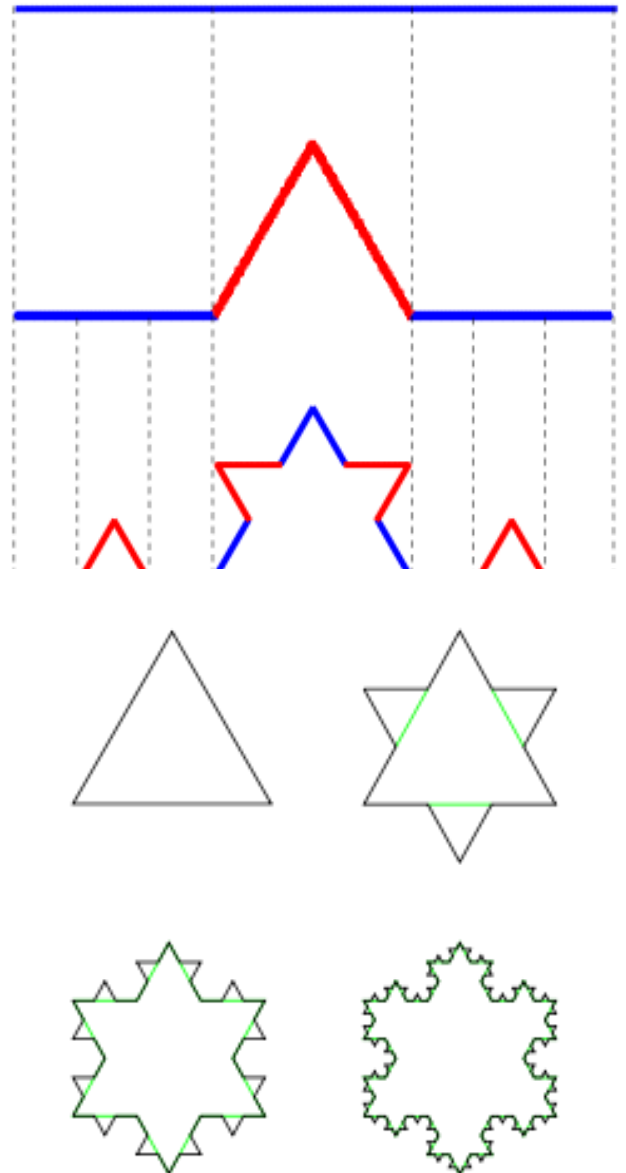
La Curva di Koch è una delle prime curve frattali di cui si conosce la descrizione. Essa apparve per la prima volta in un documento del 1904, dal titolo *Sur une sans courbe continuous tangent, obtenue par une construction géométrique élémentaire*, del matematico svedese Helge von Koch.

La costruzione della curva di Koch si ottiene ripetendo l'esecuzione di un determinato programma di istruzioni precisamente:

1. iniziando da un segmento di lunghezza assegnata, dividere il segmento in tre segmenti congruenti;
2. cancellare il segmento centrale, sostituendolo con due segmenti identici che sono i due lati di un triangolo equilatero;
3. ripetere il punto 1 per ciascuno dei segmenti attuali.

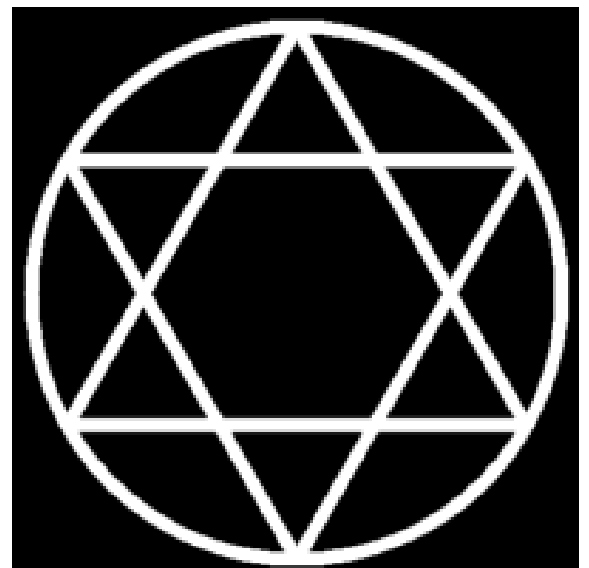
Partendo quindi da un segmento, se ne ottengono, quindi, quattro, costituenti una linea spezzata, nella prima iterazione; nella seconda, se ne ottengono $4 \times 4 = 16$ e così via, sino a generare un frattale elegante come un merletto.

Dopo l'iterazione di questo processo, la forma risultante è il contorno di un **esagramma**. **(1)** A destra l'immagine relativa alle prime quattro iterazioni del fiocco di neve di Koch.

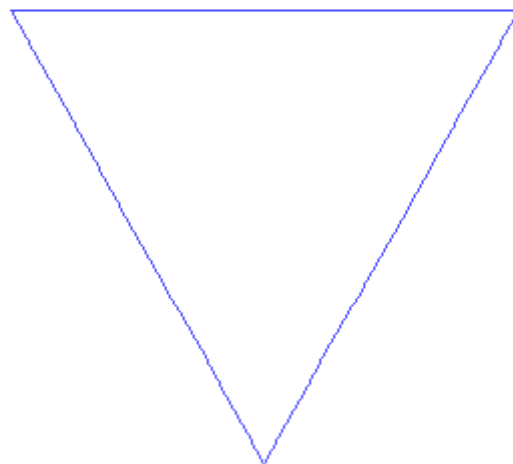


(1) Un **esagramma** (dal greco ἑξάγραμμα) è un poligono stellato a sei punti. È l'unione di due triangoli equilateri. L'intersezione è un esagono regolare.

È usato storicamente in contesti culturali e religiosi, come ad esempio la stella di Davide nell'ebraismo, oppure nell'induismo, nell'islamismo, nell'occultismo.



Un'animazione della formazione della Curva di Koch



Ingrandendo qualsiasi elemento del frattale, si osserva sempre lo stesso frattale: si tratta quindi di una curva autosimile a qualsiasi livello di dettaglio.

La curva di Koch è continua, autosimile ed ha una lunghezza infinita perché ogni iterazione crea quattro volte il numero di segmenti dell'iterazione precedente.

La lunghezza di ciascuno segmento è un terzo della lunghezza dei segmenti della fase precedente. Quindi la lunghezza totale della curva aumenta di un terzo ad ogni iterazione e, dopo n iterazioni, sarà $(4/3)^n$ volte il perimetro del triangolo iniziale, che diventa illimitato quando n tende all'infinito.

Dopo diversi calcoli, qui omessi, si trova che l'area del fiocco di neve di Koch è uguale a $8/5$ della superficie del triangolo iniziale. Pertanto il perimetro illimitato del fiocco di neve di Koch racchiude un'area finita.

Avremo così una curva di lunghezza infinita che definisce una superficie finita dato che può valere solamente 1,6 volte l'area del triangolo iniziale.

Triangolo di Sierpiński

Il **triangolo di Sierpiński** è un frattale, così chiamato dal nome di Wacław Sierpiński che lo descrisse nel 1915. È un esempio base di insieme auto-simile.

1. Si parte da un triangolo equilatero di lato a .
2. Si congiungono i punti medi di ciascun lato individuando quattro triangoli simili al primo (di lato $a/2$) di cui tre ugualmente orientati e uno capovolto.
3. Si ripete l'operazione di scomposizione precedente su ciascuno dei tre triangoli non capovolti ottenendo 9 triangolini non capovolti di lato $a/4$.
4. Si ripete la stessa operazione sui 9 triangoli ottenendone 27 di lato $a/8$.
5. Si ripete la stessa operazione sui 27 triangoli ottenendone 81 di lato $a/16$.

Osserviamo che ogni volta il numero di triangoli si triplica, mentre il lato di ciascuno di essi si dimezza.

Alla fine dell' n -esima operazione si ottengono 3^n triangoli di lato $\frac{a}{2^n}$.
Continuando all'infinito il limite è il triangolo di Sierpinski.



Dimensione frazionaria nei frattali

I frattali devono il loro nome a una curiosa proprietà che li contraddistingue: hanno dimensione frazionaria, non intera come le figure della geometria euclidea. Si può spiegare questo concetto partendo da alcuni elementi ben noti della geometria euclidea come il segmento, il quadrato, il cubo.

Per ottenere da un segmento il minimo numero di segmenti uguali fra loro basta dividerlo in due.

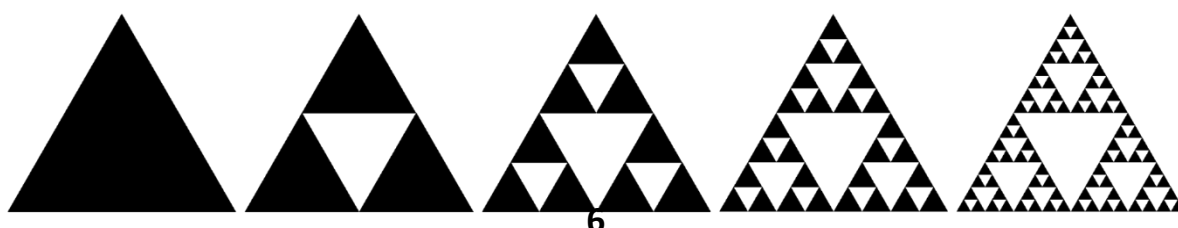
Per ottenere da un quadrato il minimo numero di quadrati uguali fra loro bisogna dividere la figura in quattro.

Per ottenere da un cubo il minimo numero di cubi uguali fra loro bisogna dividere il cubo in otto. Nel primo caso abbiamo $2 = 2^1$ segmenti, nel secondo $4 = 2^2$ quadrati, nel terzo $8 = 2^3$ cubi.

Insomma, il minimo numero di figure uguali fra loro, ottenibile nei diversi casi, è pari a una potenza di 2 il cui esponente è esattamente la dimensione della figura che si sta considerando: 1 per il segmento, 2 per il quadrato, 3 per il cubo.

Possiamo scrivere, in generale, $N = 2^d$, dove N è il minimo numero di figure uguali fra loro, ottenibile da una data figura, e d è la dimensione di quella figura.

Prendiamo in considerazione, ora, il triangolo di Sierpinski. Il minimo numero di figure uguali fra loro ottenibile da un triangolo di Sierpinski è 3.

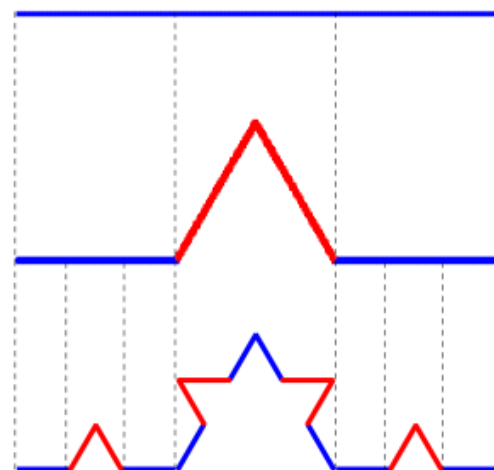


Se applichiamo a questo caso la formula precedente otteniamo $3 = 2^d$. 3 è maggiore di 2 (2^1) e minore di 4 (2^2); quindi, nel caso del triangolo di Sierpinski, d deve essere compresa fra 1 e 2, cioè deve assumere un valore non intero.

Gli oggetti geometrici classici hanno dimensioni intere: punto 0, retta 1, piano 2, spazio 3. La dimensione frattale invece è una dimensione decimale.

Un frattale con dimensione $1 < d < 2$ è una superficie delimitata da una curva o da un insieme di rette con un perimetro infinito.

Nel caso della **curva di Koch** vista precedentemente la dimensione è anch'essa un numero non intero. In un quadrato di lato a l'area è a^2 , in un cubo il volume è a^3 .



Riprendendo la relazione già vista essa diviene $N = 3^d$, per cui $3^d = 4$. Per trovare d , la dimensione del frattale, ricorro ai logaritmi e alle loro proprietà $d = \log(4)/\log(3)$ $d = 1,2619...$ dove troviamo una dimensione frazionaria.

I frattali e la natura

Conciliare il rigore della matematica con il caos della natura non è semplice, ma grazie ai frattali la scienza è riuscita a trovare un meraviglioso punto di contatto; da qualche decennio disponiamo di nuove conoscenze, di una geometria più adeguata a descrivere le forme della natura, come le nuvole o le montagne.

Per gran parte dei 2000 anni precedenti, dopo Euclide, il presupposto prevalente è stato che per valutare gli oggetti naturali fosse possibile decostruirli trasformandoli in aggregati di figure più semplici e note, come cerchi, ellissi, poligoni, ecc., per gli oggetti bidimensionali, coni, cubi, sfere, ecc., per gli oggetti tridimensionali.

Tuttavia, nel 1975 il matematico di origine polacca Benoît Mandelbrot, ricercatore presso IBM, attirò l'attenzione su figure non uniformi in cui si ripetono forme più grandi e forme più piccole, Mandelbrot li chiamò *frattali* dal latino *fractus* ossia "spezzato", oggetti di dimensione anche non intera.

Ma cosa caratterizza un oggetto frattale dal 'solito' oggetto geometrico? Gli oggetti frattali presentano *autosimilarità*, o simmetria per dilatazione, cioè le parti che compongono la figura sono simili alla figura stessa, alla figura nel suo intero. L'aggettivo *simili* va inteso un po' come nei triangoli, stessa forma ma dimensioni diverse. L'effetto visivo che ne consegue è legato all'*invarianza di scala*, in mancanza di riferimento alla scala di grandezza non riusciamo dall'immagine a distinguere se stiamo osservando un oggetto di piccole dimensioni da vicino, o uno più grande, da lontano.

Così in una spugna o in un abete o in una pianta di felce: un rametto di felce, dilatato e duplicato, si confonde con l'intera pianta, ma anche una catena montuosa ci apparirà ugualmente irregolare se la osserviamo con differenti scale, fino ad osservarne, da vicino, un singolo masso.

Sembra che la natura simpatizzi per alcune strutture, come se le avesse codificate e ripetesse alcuni schemi tante volte, in piccolo e in grande; ad esempio hanno struttura frattale i broccoli ed i cavolfiori,

Ma anche, dentro di noi e all'interno degli animali, sono frattali organi efficientissimi come i polmoni ed i vasi sanguigni, tanta superficie in poco volume (i polmoni umani hanno la superficie di un campo da tennis in poco spazio, i vasi sanguigni raggiungono ogni angolo del nostro corpo per scambiare ossigeno e anidride carbonica ma occupano solo il 3% del volume corporeo)!

La superficie della luna?
No, è mollica di pane



Attenzione, questo non significa che tutti gli oggetti siano frattali: una sedia non è formata da tante piccole sedie, ma neanche un muro di mattoni o una matrioska lo sono.

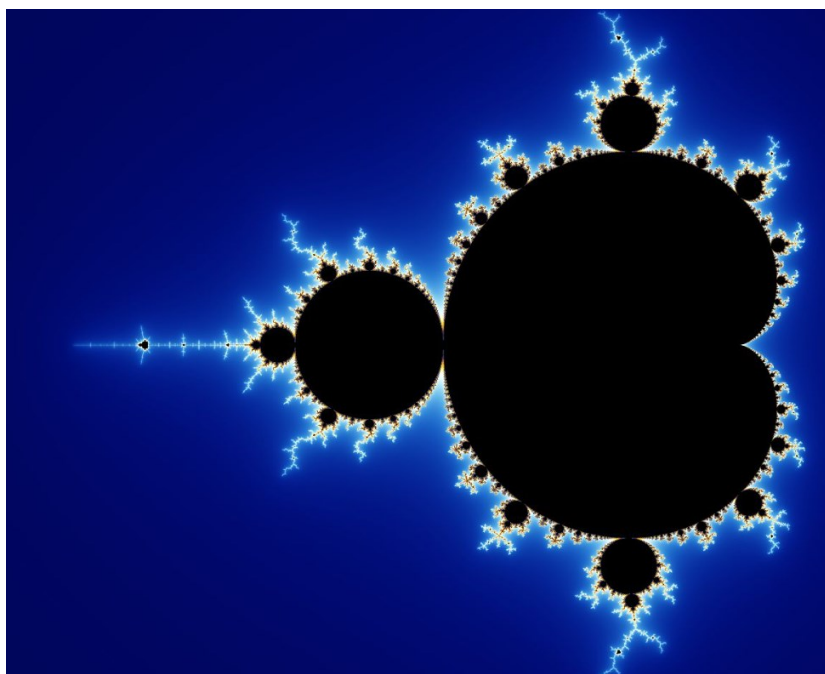
Gli oggetti frattali della natura presentano auto similarità e duplicabilità di ogni loro parte e per molti livelli, i frattali della matematica invece sono dei modelli e come tali presentano auto similarità di ogni parte ma all'infinito.

Alla fine degli anni '70 Mandelbrot ha inventato un frattale denominato *insieme di Mandelbrot*, di bellissima complessità esso manifesta autosimilarità su qualsiasi scala.

L'insieme di Mandelbrot ha una struttura straordinariamente elaborata, ha un contorno assai complesso ed infinitamente contorto e se si ingrandisce una qualsiasi parte, per quanto piccola, si ottiene una copia dell'insieme stesso.

L'insieme di Mandelbrot genera l'immagine di isole dal fascino barocco, in realtà determinate da una breve formula matematica $z \cdot z + c$, con z e c *numeri complessi* e per quei punti la cui successione non diverge all'infinito.

La reiterazione opera come la ripetizione di un tema musicale, con piccole variazioni, e quello che ne esce non è ancora stato compreso appieno.



Una bella rappresentazione al computer di un “Insieme di Mandelbrot”

Diceva Mandelbrot: *“il nostro cervello apprezza la ripetizione di certi schemi [...], parte della bellezza sta nel riconoscere tali schemi ripetitivi e nel comprendere che non sono perfetti”*.

Pittori e artisti hanno intuito e compreso tali meccanismi prima che i matematici li modellizzassero, vediamo nell'immagine seguente una delle opere del pittore giapponese Hokusai, l'occhio e la mente di Hokusai scorgevano sicuramente questi schemi nella natura.



“La grande onda di Kanagawa” - 1831 - K. Hokusai

La geometria frattale è il principio che lega tra loro molte delle discipline di studio più rilevanti. Con i frattali la scienza è riuscita a codificare la natura in modo efficiente, a coglierne le somiglianze ed a quantificarne l'irregolarità (tecnicamente la 'dimensione frattale').

Abbiamo già discusso di alcuni aspetti legati al mondo dell'arte, la costruzione di oggetti e architetture più naturali (pensiamo alle opere di Antonio Gaudì sembra che la Sagrada Familia abbia delle notevoli caratteristiche frattali [2] ci permetterebbe di vivere in un mondo ancora più bello e più in armonia con la natura.

[2] Un'indagine sull'opera di Gaudì fanno ipotizzare che la Sagrada Familia abbia delle notevoli caratteristiche frattali. Gaudì ha posto l'elemento di maggiore visibilità del Tempio Espiatorio: la torre di Gesù, sulla crociera tra il transetto e la navata principale.

La geometria di questo spazio genera dei frattali che scandiscono tutti gli elementi architettonici della costruzione. La densità dei rapporti frattali è tale che la loro completa validazione porterebbe a ritenere che la Sagrada Familia sia un caso unico nella storia dell'architettura.

La struttura geometrico frattale di questa costruzione è molto simile a quella che domina nel mondo della natura. Anche se agli inizi del Novecento il termine di frattale non era ancora stato coniato, Gaudì conosceva il fascino di questa geometria e ne intuiva il significato vitale. Nella Sagrada Familia, come in un frattale, l'inizio e la fine sono la stessa cosa, la parte e il tutto sono identici, esprimono sempre la stessa cifra e lo stesso significato, in un processo dinamico infinito. Una geometria perfetta a cui affidare il compito di esprimere la sacralità di questa chiesa.

Come spesso avviene per le scoperte tecnologiche, le conseguenze sono spesso inattese: nello studio delle fluttuazioni dei mercati finanziari il diagramma dei prezzi in un secolo con rilevazioni mensili ha evidenziato sorprendenti similitudini con quello dei prezzi dell'anno, con rilevazioni ogni ora.

In medicina è ovviamente fondamentale poter ricreare organi umani, ma molte sono le applicazioni dei frattali alla ricerca medica, per esempio per comprendere il comportamento dei virus e lo sviluppo dei tumori, ma anche nello studio del ritmo del cuore: l'analisi degli ECG evidenzia tutt'altro che costanza nel ritmo ma, al contrario, la presenza di continui adattamenti, irregolarità e singolarità che i frattali stanno aiutando a spiegare.

L'analisi frattale viene applicata allo studio delle interruzioni di corrente nelle reti elettriche, nell'implementazione di videogiochi, in meteorologia (mai pensato che i cicloni su vasta scala, su scala molto più piccola si ripetono fino a semplici raffiche di vento?), nello sviluppo di polimeri e materiali ceramici.

Al crescere del numero delle applicazioni è sempre più evidente che i frattali ci stanno aiutando a comprendere un mondo forse solo apparentemente caotico.

Alcune caratteristiche dei frattali

«Perché la geometria viene spesso definita fredda e arida? Uno dei motivi è la sua incapacità di descrivere la forma di una nuvola, di una montagna, di una linea costiera, di un albero». Parole di Benoît Mandelbrot, il creatore della teoria dei frattali.

I frattali sono figure geometriche generate al calcolatore usando formule matematiche: rappresentano oggetti molto complessi, che sono spesso anche immagini belle da vedere, vere opere d'arte

Dare una definizione soddisfacente di questi stranissimi enti matematici non è affatto facile: non ci è riuscito nemmeno il loro scopritore!

In prima approssimazione possiamo affermare che una curva si dice **frattale** se ha la proprietà dell'**autosimilarità**: ingrandendo un qualsiasi tratto di curva si visualizza un insieme di particolari altrettanto ricco e complesso del precedente; questo procedimento di "zoom" può proseguire all'infinito.

Da ciò derivano due curiose caratteristiche delle curve frattali:

- pur essendo continue non ammettono una tangente unica in alcun punto;

- presi due punti della curva, anche vicinissimi tra loro, la distanza fra essi (misurata lungo la curva) è sempre infinita.

Possiamo definire in primissima approssimazione, **curva continua** una curva che può essere disegnata senza staccare la matita dal foglio.

Quest'ultimo fatto lo possiamo facilmente verificare per la curva di Koch definita anche come fiocco di neve che abbiamo visto sopra. Come già si diceva ad ogni iterazione la lunghezza della curva cresce di un fattore $4/3$: se il segmento di partenza ha lunghezza pari a 1, il secondo misura $4/3$, il terzo $16/9$, il quarto $64/27$ e così via.

Questa successione è chiaramente divergente, cioè tende ad assumere un valore infinito. Ma non è tutto: ogni pezzo del fiocco di neve, anche piccolissimo, gode della proprietà dell'autosimilarità cioè contiene in sé un'infinita ricchezza di particolari, di minuscoli fiocchi di neve, e quindi anch'esso è di lunghezza infinita.

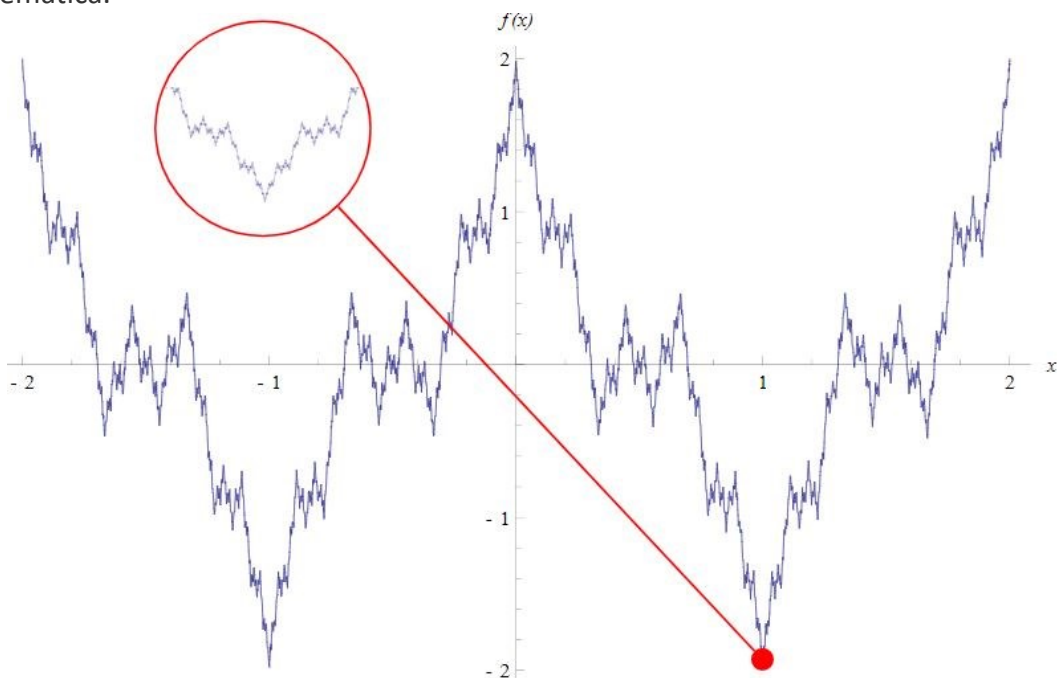
Funzione di Weierstrass

Weierstrass aveva formalizzato il concetto di 'funzione continua'. Costituita interamente da spigoli, per quanto venga ingrandita, la funzione di Weierstrass non appare mai liscia. All'epoca fu considerata un'anomalia matematica.

Grafico della **funzione di Weierstrass**, con ingrandimento attorno ad un punto di minimo. Come si può notare nel cerchio, la funzione presenta autosimilarità.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

$0 < a < 1$ e b è un numero positivo dispari tali che $a b > 1 + \frac{3}{2} \pi$



Frattali, proporzione aurea e numeri di Fibonacci



Gli studiosi hanno a lungo osservato che molte piante producono foglie, germogli o fiori che formano modelli a spirale. Il cavolfiore è un esempio unico di questo fenomeno, perché queste spirali si ripetono in diverse scale di grandezza, il che costituisce un segno distintivo della geometria frattale. Questa autosomiglianza è particolarmente evidente nella varietà **romanesco** a causa della caratteristica forma conica dei fiori.

Ecco le caratteristiche che accomunano il cavolfiore alle meraviglie della scienza.

La geometria frattale è la risultante matematica della teoria del caos; un frattale è il modello che deriva dall'onda dell'attività caotica. Quel singolo modello geometrico si ripete migliaia di volte con diversi ingrandimenti.

Per questo motivo, i frattali sono spesso paragonati alle matrioske russe. Molti modelli frattali esistono solo nella teoria matematica; tuttavia, negli ultimi decenni, gli scienziati hanno scoperto caratteristiche che rimandano ai frattali in molte forme esistenti in natura, come le gemme che compongono il cavolfiore romanesco.

Ogni germoglio è composto da una serie di germogli più piccoli, anche se il modello non raggiunge dimensioni infinitesimali ed è quindi un frattale approssimativo. Le punte ramificate, chiamate meristemi, formano una spirale logaritmica; il numero di spirali sulla testa del cavolfiore corrisponde al **numero di Fibonacci**, a sua volta collegato alla nota proporzione aurea.

Gli scienziati hanno riflettuto a lungo sui possibili meccanismi alla base di questo insolito schema nella disposizione delle foglie sullo stelo di molte piante, tra cui pini, margherite, dalie, girasoli e cactus, risalendo fino alle osservazioni di Leonardo da Vinci.

Nel 1754 il naturalista svizzero Charles Bonnet aveva notato che queste spirali mostravano proporzioni auree in senso orario o antiorario, mentre nel 1837 i fratelli francesi Auguste e Louis Bravais scoprirono la relazione tra le proporzioni delle spirali della fillotassi e la sequenza di Fibonacci.

Per concludere possiamo dire che i **frattali** permettono di affrontare problemi di fronte ai quali la matematica tradizionale si doveva arrestare; permette di affrontare il problema di capire e descrivere l'architettura che governa la natura e come è distribuita geometricamente la materia planetaria nello spazio universale.

Conclusioni

Cerchiamo ora di sintetizzare alcuni concetti relativi ai frattali.

Esempi in natura: La natura è ricca di esempi di forme frattali. Ad esempio:

Alberi: Ogni ramo di un albero è approssimativamente simile all'intero albero, e ogni rametto è a sua volta simile al proprio ramo.

Coste: Le coste mostrano auto-similarità quando ingrandite. I golfi dentellati e le insenature si ripetono in modo simile su diverse scale.

Montagne: Il profilo geomorfologico delle montagne spesso presenta strutture frattali.

Cristalli di ghiaccio, foglie e fiori mostrano anche questa caratteristica.

Utilizzo dei frattali

I frattali come si diceva sono forme geometriche che presentano una struttura irregolare e ripetitiva, a prescindere dall'ingrandimento. Questa caratteristica li rende particolarmente adatti per essere rappresentati in formato digitale, che è basato sulla ripetizione di pixel. I frattali sono utilizzati in numerosi ambiti della tecnologia digitale.

Scienza: I frattali sono utilizzati per modellare sistemi naturali, come la crescita di tessuti o la diffusione di malattie.

Tecnologia: I frattali sono utilizzati in numerosi ambiti della tecnologia digitale, tra cui la grafica computerizzata per creare immagini realistiche e complesse, come quelle dei paesaggi naturali o dei sistemi biologici. Inoltre, i frattali sono stati utilizzati per la compressione di dati.

La loro capacità di rappresentare forme complesse e irregolari li rende particolarmente adatti per la creazione di immagini realistiche, la simulazione di sistemi complessi e la progettazione di strutture efficienti e robuste.

In futuro, i frattali potrebbero essere utilizzati per creare nuove forme di intrattenimento, come film e videogiochi ancora più realistici. Potrebbero anche essere utilizzati per migliorare l'efficienza e la sicurezza di una vasta gamma di prodotti e servizi tecnologici.

Ingegneria e progettazione: I frattali possono essere utilizzati per simulare il comportamento di sistemi complessi, come il flusso del traffico o il comportamento delle onde sonore. Sono anche utilizzati per progettare strutture più efficienti e robuste, come le ali degli aeroplani o le antenne radio.

Sicurezza informatica: i frattali sono utilizzati per creare algoritmi di crittografia più robusti, che sono più difficili da decifrare. Sono anche utilizzati per creare watermark digitali, che sono una sorta di firma che i fotografi sono soliti apporre sui propri scatti per certificarne l'originalità e rendere impossibile il furto e per proteggere i diritti d'autore dei contenuti digitali.

Arte: I frattali sono utilizzati anche nell'arte, sia figurativa che musicale. Grazie all'uso dei computer, le formule matematiche che definiscono i frattali possono essere trasformate in immagini e in suoni. Queste sono solo alcune delle applicazioni dei frattali. La loro versatilità e la loro capacità di descrivere forme complesse li rendono strumenti molto potenti in molti campi diversi.