Equazioni

Definizioni preliminari

Principi di equivalenza

equazioni di 1° grado

equazioni di 2° grado

soluzione grafica di equazioni di 1° e 2° grado

soluzione grafica di un sistema di equaziioni di 1° grado

a cura di Bruno Pizzamei

Equazioni

Un'***equazione*** (dal latino *aequatio*) è una uguaglianza matematica tra due espressioni contenenti una o più variabili, dette ***incognite***. L'uso del termine risale almeno al *Liber abaci* del Fibonacci (1228).

Se un'equazione ha **n** incognite, allora ogni **n upla** di elementi che sostituiti alle corrispondenti incognite rendono vera l'uguaglianza è una **soluzione** dell'equazione. Risolvere un'equazione significa individuare l'insieme di tutte le sue soluzioni.

Dominio

Il ***dominio*** (o i*nsieme di definizione*) delle variabili incognite è l'insieme degli elementi per cui le espressioni ad ambo i membri dell'equazione sono definite, ovvero quell'insieme di numeri per cui l'equazione esiste.

L'insieme delle soluzioni è condizionato dal dominio: per esempio l'equazione

$x^2 - 2 = 0$

non ammette soluzioni se il dominio è l'insieme dei numeri razionali, mentre ammette due soluzioni nei numeri reali, che possono essere scritte come $\pm\sqrt{2}$. . Analogamente, l'equazione $x^2 + 1 = 0$

non possiede soluzioni reali ma è risolvibile se il dominio è il campo dei numeri complessi.

Principi di equivalenza

Due equazioni si dicono ***equivalenti*** se i rispettivi insiemi delle soluzioni coincidono. Vi sono due principi che consentono di manipolare le equazioni per trovare l'insieme delle soluzioni; essi sono una conseguenza diretta delle proprietà delle uguaglianze:

Primo principio di equivalenza: data un'equazione, aggiungendo o sottraendo ad entrambi i membri uno stesso numero o una stessa espressione contenente l'incognita si ottiene un'equazione equivalente, a patto che, nel caso di aggiunta di un'espressione dipendente da un'incognita, non vengano ristrette le condizioni di esistenza.

Esempio:

4x + 13 =28

4x + 13 +2 =28 +2

4x + 15 =30

Secondo principio di equivalenza: data un'equazione, moltiplicando o dividendo ambo i membri per un numero diverso da zero, o per un'espressione contenente l'incognita che non si annulli qualunque sia il valore dell'incognita stessa, e che non restringa le condizioni di esistenza, si ottiene un'equazione equivalente.

Esempio:

$$3x - 1 = \frac{3x}{2x-1}$$
$$(2x-1)(3x-1) = (2x-1)\frac{3x}{2x-1}$$
$$6x^2 - 5x + 1 = 3x$$
$$6x^2 - 8x + 1 = 0$$

l'equivalenza logica tra le prime due e le rimanenti equazioni non sussiste però per x =1/2 perché ne annulla il denominatore.

Equazione di primo grado

Un’equazioni di primo grado ad un'incognita è un’**equazioni in cui l'incognita è elevata a esponente 1 e può essere moltiplicata o sommata con termini numerici qualsiasi**.

ax +b = 0

applico il primo principio di equivalenza

ax + ~~b~~ - ~~b~~= 0 – b   ax = - b

applico il secondo principio di equivalenza

1/a * ax = 1/a* (- b)   **x = -b/a**

Un'equazione si dice:

determinata se ammette un numero finito di radici, in tal caso l'insieme soluzione sarà discreto, formato da un numero finito di elementi.

$2x - 6 = 12 \qquad x = (12 + 6)/2 \quad x = 9$

impossibile se non ammette alcuna radice, in tal caso l'insieme soluzione sarà l'insieme vuoto.

$x + 1 = x - 1 \qquad 0x = -2$

indeterminata se il numero delle soluzioni è infinito ma non coincide con tutto il dominio, in tal caso l'insieme soluzione sarà infinito e diverso dall'insieme dominio.

$3x - 1 = 3(x + 1) - 4 \qquad 3x - 1 = 3x + 3 - 4 \qquad 3x - 3x = 1 + 3 - 4 \qquad 0x = 0$

Identità se ha come insieme delle soluzioni tutto il dominio, in tal caso l'insieme delle soluzioni sarà uguale al dominio.

$7x + 2x = 9x$

$$ax = b \quad \begin{cases} a = 0,\ b = 0 & \rightarrow \quad \text{indeterminata} \\ a = 0,\ b \neq 0 & \rightarrow \quad \text{impossibile} \\ a \neq 0,\ \forall b & \rightarrow \quad \text{determinata}:\ x = \frac{b}{a} \end{cases}$$

Equazione di secondo grado

Un' equazione di secondo grado è un'equazione del tipo: $ax^2 + bx + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. I valori a, b, c prendono il nome di coefficienti e, in particolare, c viene detto termine noto.

$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ utilizzo i principi di equivalenza

$ax^2 + bx = -c$ / moltiplico per **4a** entrambi i membri

$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$ aggiungo $\mathbf{b^2}$ ad entrambi i membri

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$ $b^2 - 4ac = \Delta$

$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Δ prende il nome di discriminante dell'equazione. La parola discriminante deriva dal verbo discrimen (=divisione); in effetti, il Δ permette di effettuare una distinzione tra la tipologia delle soluzioni di un'equazione di secondo grado. Si possono infatti presentare tre casi:

Equazione $ax^2 + bx + c = 0$ completa con $a \neq 0$	
Discriminante	Soluzioni
$\Delta > 0$	Due soluzioni reali e distinte $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	Due soluzioni reali e coincidenti $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
$\Delta < 0$	Nessuna soluzione reale $I.S. = \emptyset$

Per quanto riguarda le soluzioni di equazioni incomplete:

Equazioni incomplete			
Coefficienti	Nome	Equazione	Soluzioni
$b = 0,\ c = 0$	Monomia	$ax^2 = 0$	$x_1 = x_2 = 0$
$b = 0,\ c \neq 0$	Pura	$ax^2 + c = 0$	se a e c sono concordi $I.S. = \emptyset$ se a e c sono discordi $+\sqrt{-\frac{c}{a}} \vee x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$
$b \neq 0,\ c = 0$	Spuria	$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0 \vee x_2 = -\frac{b}{a}$

Soluzione grafica di equazioni di 1° e 2° grado

Comunque si presenti inizialmente, un’equazione di primo grado può essere, con una serie di passaggi, riportata nella forma $\mathbf{a\,x + b = 0}$.

Analogamente un’equazione di secondo grado può assumere sempre la forma

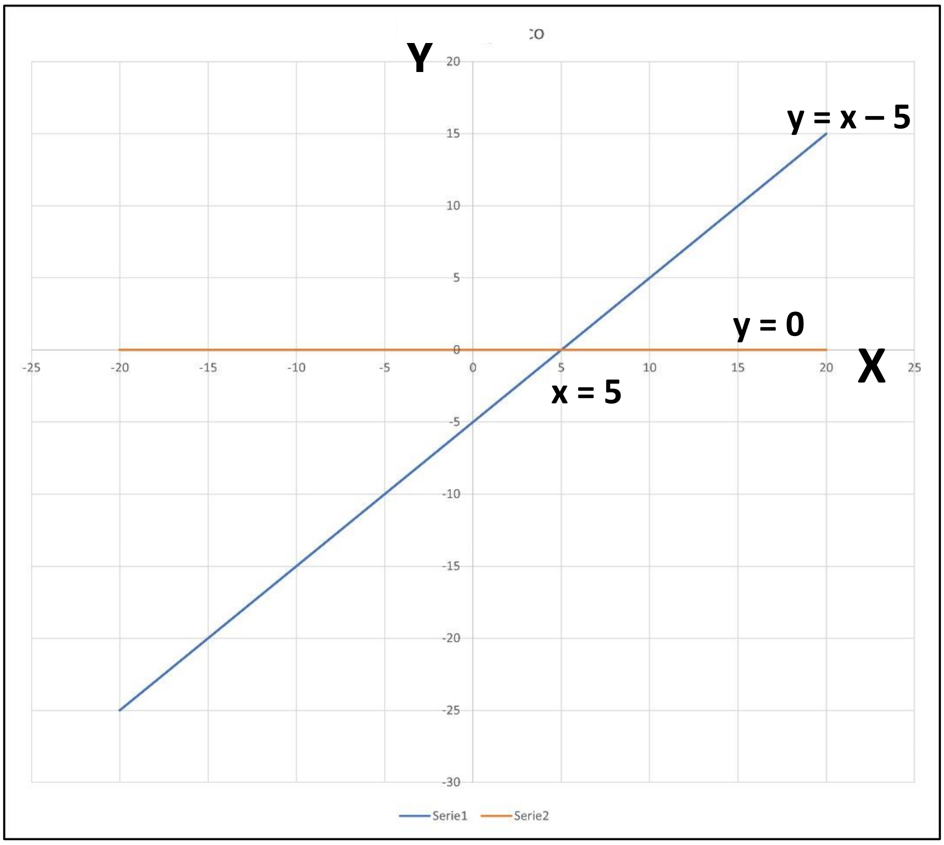
$\mathbf{a\,x^2 + b\,x + c = 0}$.

L’equazione $\mathbf{a\,x + b = 0}$ può derivare dal sistema

$$\begin{cases} y = a\,x + b \\ y = 0 \end{cases}$$

Sul piano cartesiano $\mathbf{y = a\,x + b}$ rappresenta l’equazione di una retta generica $\mathbf{(y = m\,x + q)}$, mentre $\mathbf{y = 0\ (y = 0\,x + 0)}$ rappresenta l’equazione dell’asse X, asse delle ascisse.

L’ascissa del punto d’incontro delle due rette rappresenta la soluzione dell’equazione.



Esempio

x – 5 = 0

x = 5

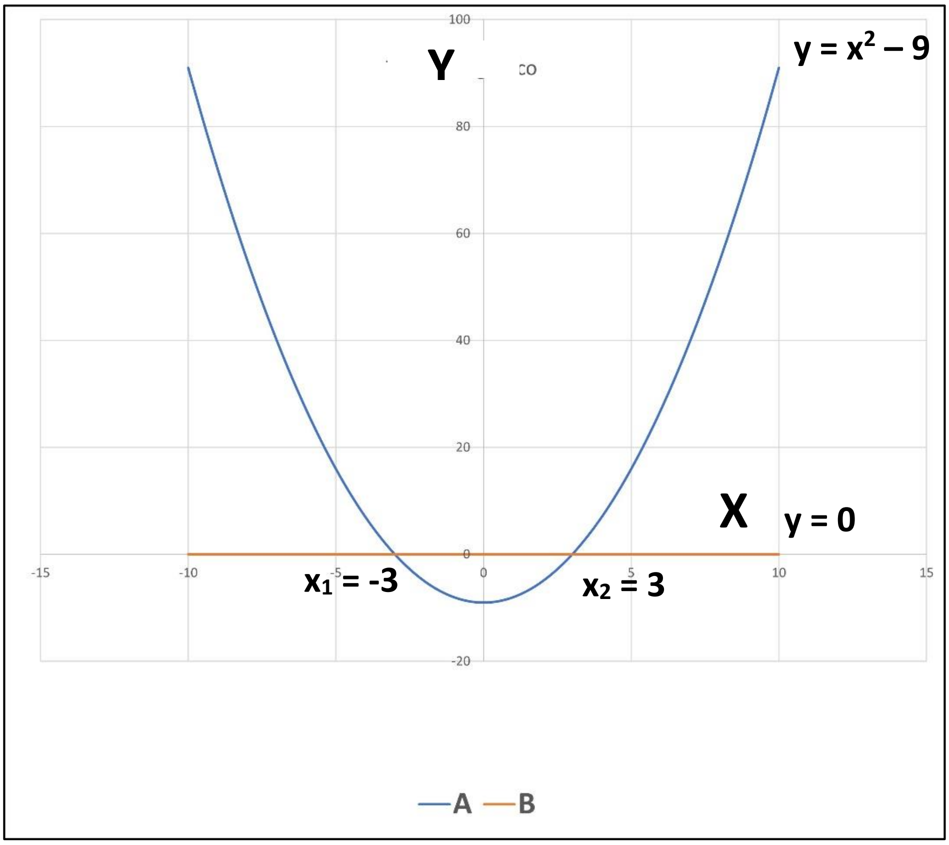
Per quanto riquarda la soluzione dell'equazione di secondo grado si può procedere in modo analogo.

L'equazione $\mathbf{a}\,x^{2} + \mathbf{b}\,x + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ può derivare dal sistema:

$$\begin{cases} y = a\,x^{2} + b\,x + c & \text{equazione di una parabola generica} \\ y = 0 & \text{equazione dell'asse X, asse delle ascisse.} \end{cases}$$

Sul piano cartesiano $\mathbf{y = a^2\,x + b\,x + c}$ rappresenta l'equazione di una parabola generica

Le ascisse dei punti d'incontro della parabola con l'asse X ***(se esistono)***rappresentano le soluzioni dell'equazione di secondo grado.



Esempio

$\mathbf{x^2 - 9 = 0}$

$\mathbf{x_1 = -3 \quad x_2 = 3}$

I sistemi di due equazioni lineari in due incognite

Consideriamo, oltre all'equazione 3x + 5y - 4 = 0, la seguente: x - 2y = -1. Ciascuna delle due equazioni considerate ha infinite soluzioni. Ma esistono soluzioni comuni a entrambe? Cioè, esistono coppie ordinate (x ; y) di valori che soddisfano contemporaneamente le due equazioni?

Soluzione grafica di un sistema di equazioni di 1° grado

Un sistema di equazioni è un insieme di equazioni in cui compaiono le stesse incognite, per le quali ci chiediamo quali sono le soluzioni comuni.

Per indicare un sistema, si scrivono le equazioni in colonna, racchiuse da una parentesi graffa:

$$\begin{cases} 3x - 5y - 4 = 0 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

I sistemi sono molto utili per la risoluzione di problemi.

Vediamone uno:

Lucia e Elena sono sorelle. La somma delle loro età è 31 e Lucia è nata tre anni prima di Elena. Quanti anni ha ciascuna? [17; 14]

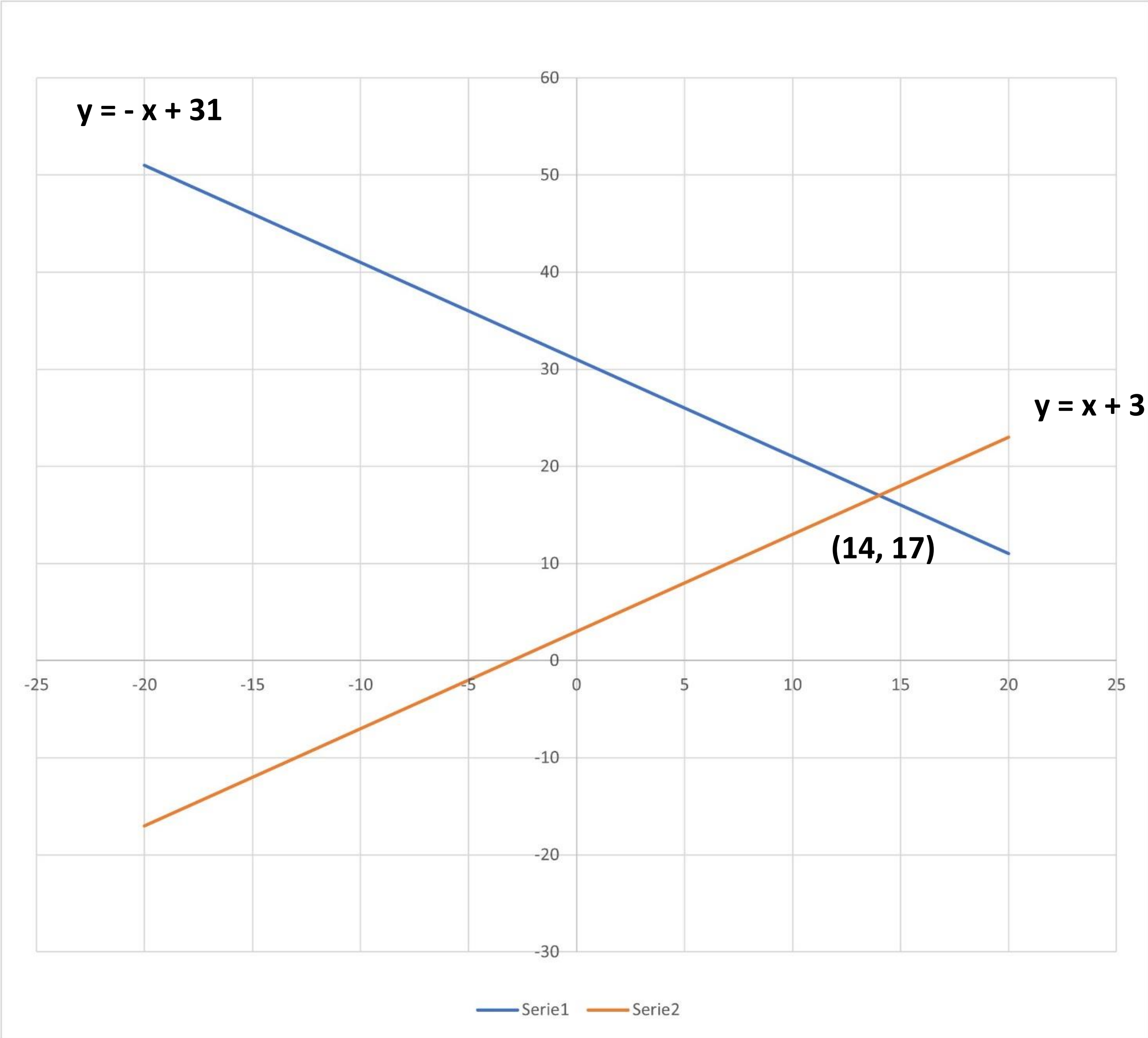
Chiamo **x** l'età di Lucia e **y** l'età di Elena. Imposto il sistema

$$\begin{cases} x + y = 31 \\ y = x + 3 \end{cases}$$

Esistono diversi metodi algebrici per la sua risoluzione.
Ci limitiamo a considerare un metodo grafico di soluzione.

$$\begin{cases} x + y = 31 \\ y = x + 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -x + 31 \\ y = x + 3 \end{cases}$$

Per quanto visto in precedenza siamo in presenza di due equazioni di una retta.
Le coordinate del punto di intersezione tra le due rette rappresentano le soluzioni del problema



y = - x + 31
y = x + 3
(14, 17)
60
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-25
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20
25
Serie1
Serie2