

La geometria euclidea

Il piano euclideo: concetti primitivo e definizioni fondamentali

Assiomi e teoremi

I 5 postulati di Euclide

Sul quinto postulato

Uguaglianza e congruenza

La similitudine

Criteri di congruenza

La similitudine e i criteri relativi

Il teorema di Pitagora

I teoremi di Euclide

Il teorema di Talete

Angoli e loro misura

Gradi e radianti.

A cura di Bruno Pizzamei

Il piano euclideo

Per una completa comprensione della geometria euclidea è necessario definire le basi su cui si regge.

Un **concetto primitivo**, o **nozione primitiva**, in molte presentazioni matematiche, indica un concetto che, per la propria semplicità ed intuitività, si rinuncia a definire mediante termini e concetti già definiti all'interno di un sistema formale, e che al contrario si sceglie di sfruttare per formulare la definizione di altri concetti; pertanto un concetto primitivo si accetta senza spiegazioni perché il suo significato è ovvio.

Ad esempio in molte esposizioni della teoria degli insiemi, l'insieme stesso è considerato un concetto primitivo. Infatti è pressoché impossibile darne una definizione che non ricorra a impegnative nozioni della logica matematica senza usare termini come *lista*, *complesso di*, *aggregato*, *raggruppamento*, ecc. che, in realtà, non sarebbero altro che sinonimi di tale concetto.

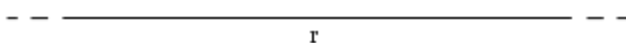
Anche molte esposizioni della geometria fanno riferimento a entità fondamentali che svolgono il ruolo dei concetti primitivi.

Nella geometria euclidea sono il **punto**, la **retta** e il **piano**. Ad esempio il concetto di punto viene suggerito dall'osservazione di un granello di sabbia o dalla punta di uno spillo; il concetto di retta da un sottile filo di seta o da un raggio di luce; il concetto di piano dalla superficie tranquilla di uno specchio d'acqua

- **Punto** (un'unità del piano senza dimensione, intuitivamente immaginabile come un granello di sabbia) • •

I punti vengono indicati con le lettere maiuscole dell'alfabeto.

- **Retta** (immaginabile come una linea nel piano di lunghezza infinita)



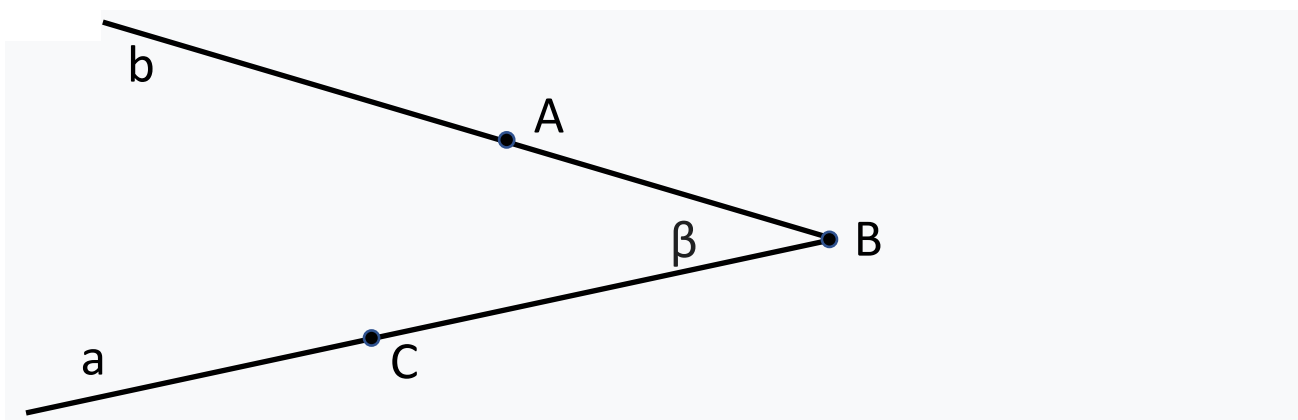
Le rette vengono indicate con le lettere minuscole dell'alfabeto

- **Piano** (immaginabile come una superficie piana infinita)

I piani vengono indicati con le lettere minuscole dell'alfabeto greco

Altri importanti concetti sono: la **semiretta** (una delle due parti in cui una retta resta divisa da un punto), il **segmento** (la parte di retta compresa tra due punti, inclusi gli stessi), il **semipiano** (una delle due parti in cui il piano resta diviso da una retta, definita *origine* o *frontiera*) e l'angolo (una delle due parti di piano delimitate da due semirette aventi origine in comune).

Si definisce infine, il **poligono** come una poligonale chiusa e non intrecciata e la **circonferenza** come l'insieme dei punti P che hanno distanza r (con $r > 0$) da un determinato punto O (detto *centro*).



L'**angolo** è ciascuna delle due parti in cui un piano risulta diviso da due semirette che hanno l'origine in comune (vertice B)

La geometria euclidea

La **geometria euclidea** è un sistema matematico **ipotetico deduttivo** attribuito al matematico alessandrino Euclide, che la descrisse nei suoi *Elementi*.

In un sistema ipotetico deduttivo, dopo aver accettato i **concetti primitivi**, sono assunti alcuni enunciati fondamentali detti **assiomi** (nozioni comuni) e **postulati** (per questo il sistema viene detto **ipotetico**) e da essi vengono logicamente dedotte tutte le altre affermazioni accettate nella teoria, dette **teoremi** (e per questo è **deduttivo**),

La geometria euclidea consiste quindi nell'assunzione alcuni **assiomi** (nozioni comuni) e di **cinque semplici e intuitivi postulati** e, nella derivazione da detti assiomi, di altre proposizioni dette **teoremi** che non abbiano alcuna contraddizione con essi.

Ogni teorema è costituito da tre parti principali: le **ipotesi** (i dati di partenza, che non si possono contraddire), la **tesi** (ciò che si deve dimostrare) e la **dimostrazione** (l'insieme di tutti i ragionamenti utilizzati per confermare, o smentire, la tesi)

Sebbene molte delle conclusioni di Euclide fossero già conosciute dai matematici, egli mostrò come queste potessero essere organizzate in una maniera deduttiva e con un sistema logico.

Gli *Elementi* di Euclide incominciano con un'analisi della geometria piana, attualmente insegnata nelle scuole secondarie e utilizzata come primo approccio alle dimostrazioni matematiche, per poi passare alla geometria solida in tre dimensioni.

Le definizioni (termini,)

1. Punto è ciò che non ha parti.
2. Linea è lunghezza senza larghezza.
3. Estremi di una linea sono punti.
4. Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai punti su essa (cioè, ai suoi punti).
5. Superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza.
6. Estremi di una superficie sono linee.
7. Superficie piana è quella che giace ugualmente rispetto alle rette su essa (cioè, alle sue rette).
8. Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee su un piano, le quali si incontrino fra loro e non giacciono in linea retta.
9. Quando le linee che comprendono l'angolo sono rette l'angolo si chiama rettilineo.
10. Quando una, retta innalzata su una [altra] retta forma gli angoli adiacenti uguali fra loro, ciascuno dei due angoli uguali è retto, e la retta innalzata si chiama perpendicolare a quella su cui è innalzata.
11. Angolo ottuso è quello maggiore di un retto.
12. Angolo acuto è quello minore di un retto.
13. Termine è ciò che è estremo di qualche cosa.
14. Figura è ciò che è compreso da uno o più termini.

15. Cerchio è una figura piana compresa da un'unica linea [che si chiama circonferenza] tale che tutte le rette, le quali cadano sulla [stessa] linea, [cioè sulla circonferenza del cerchio,] a partire da un punto fra quelli che giacciono internamente alla figura, sono uguali fra loro.
16. Quel punto si chiama centro del cerchio.
17. Diametro del cerchio è una retta condotta per il centro e terminata da ambedue le parti dalla circonferenza del cerchio, la quale retta taglia anche il cerchio per metà.
18. Semicerchio è la figura compresa dal diametro e dalla circonferenza da esso tagliata. E centro del semicerchio è quello stesso che è anche centro del cerchio.
19. Figure rettilinee sono quelle comprese da rette, vale a dire: figure trilatera quelle comprese da tre rette, quadrilatera quelle comprese da quattro, e multilatera quelle comprese da più di quattro rette.
20. Delle figure trilatera, è triangolo equilatero quello che ha i tre lati uguali, isoscele quello che ha soltanto due lati uguali, e scaleno quello che ha i tre lati disuguali.
21. Infine, delle figure trilatera, è triangolo rettangolo quello che ha un angolo retto, ottusangolo quello che ha un angolo ottuso, ed acutangolo quello che ha i tre angoli acuti.
22. Delle figure quadrilatera, è quadrato quella che è insieme equilatera ed ha gli angoli retti, rettangolo quella che ha gli angoli retti, ma non è equilatera, rombo quella che è equilatera, ma non ha gli angoli retti, romboide quella che ha i lati e gli angoli opposti uguali fra loro, ma non è equilatera né ha gli angoli retti. E le figure quadrilatera oltre a queste si chiamino trapezi.
23. Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non si incontrano fra loro da nessuna delle due parti.

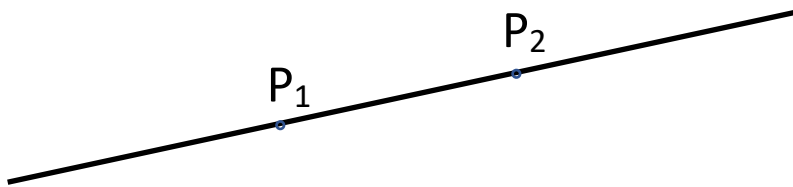
Gli assiomi(nozioni comuni):

1. Cose che sono uguali ad una stessa sono uguali anche fra loro. (proprietà transitiva).
2. E se cose uguali sono addizionate a cose uguali, le totalità sono uguali.
3. E se da cose uguali sono sottratte cose uguali, i resti sono uguali.
4. E se cose uguali sono addizionate a cose disuguali, le totalità sono disuguali.

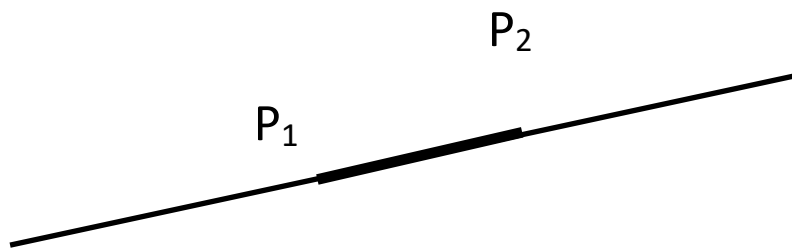
5. E i doppi di una stessa cosa sono uguali tra loro.
6. E metà di una stessa cosa sono uguali fra loro.
7. E cose che coincidono tra loro sono uguali (proprietà riflessiva).
8. E il tutto è maggiore della parte.

I cinque postulati di Euclide :

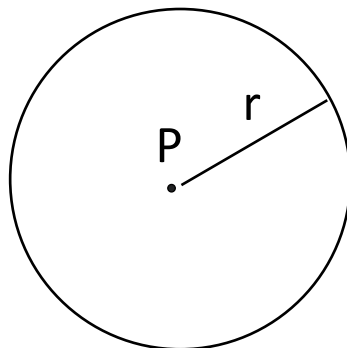
1. Risultato postulato: che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto.



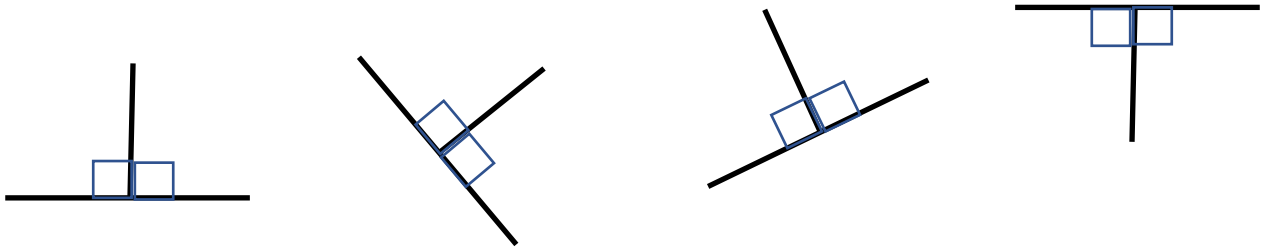
2. E che una retta terminata (= finita) si possa prolungare continuamente in linea retta



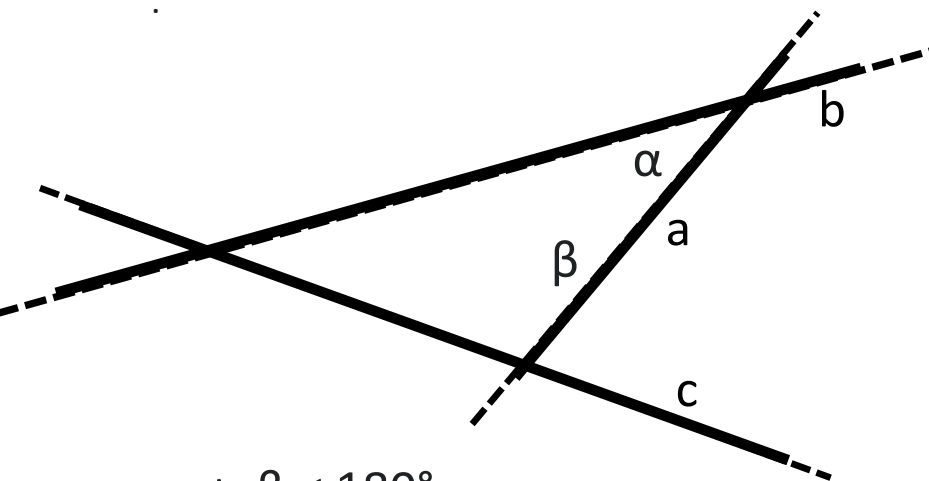
3. E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza (= raggio)



4. E che tutti gli angoli retti siano uguali fra loro.



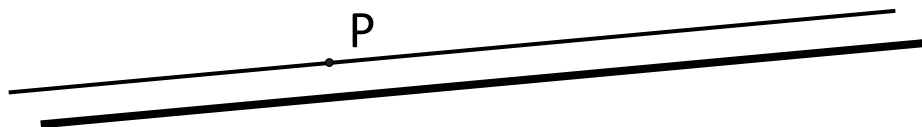
5. E che, se una retta **(a)** venendo a cadere su due rette **(b)** e **(c)** forma gli angoli interni (α e β) e dalla stessa parte minori di due retti (= tali che la loro somma sia minore di due retti), le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti (= la cui somma è minore di due retti)



$$\alpha + \beta < 180^\circ$$

Il quinto postulato è equivalente all' enunciato seguente, oggi più usato:

Per un punto esterno a una retta data passa una e una sola retta parallela a questa.



Si nota subito una differenza tra i primi quattro, immediatamente evidenti e praticamente verificabili col semplice uso di matita, righello e compasso, e il quinto, che non è caratterizzato dall'immediatezza pratica dei primi, mentre presenta una

formulazione molto più involuta. Infatti egli dimostra le prime 28 proposizioni del primo libro degli *Elementi* senza fare uso del quinto postulato.

Corollari

Dagli assiomi si possono dedurre delle relazioni di incidenza tra punti, rette e piani. Ad esempio:

- Per un punto passano infinite rette
- Per due punti distinti passa una e una sola retta
- Per una retta nello spazio passano infiniti piani
- Per tre punti non allineati nello spazio passa un solo piano
- Per tre punti allineati passa una e una sola retta

Si definiscono quindi altre nozioni, quali ad esempio:

- Due rette nello spazio si dicono *complanari* quando giacciono sullo stesso piano.
- Se un punto divide una retta, ciascuna delle due parti si dice semiretta: questa sarà dotata di un'origine, ma non di una fine.
- La parte di retta delimitata da due punti è detta segmento.

Sul V postulato

Dopo Euclide sono nati particolari tipi di geometrie che non necessariamente rispettano i cinque postulati; tali geometrie sono definite ***non euclidee***.

Nel 1899, David Hilbert (nato a Königsberg nel 1862 e morto a Gottinga nel 1943) propone un sistema assiomatico corretto per la geometria. Così facendo si cercava di dimostrare per assurdo la correttezza del quinto postulato, e poi perché nella versione originale sono impliciti alcuni altri assunti: ad esempio, nel primo assioma, è implicito che la retta esista e sia una sola, e che esistano due punti distinti; nel secondo, che una retta posseda più di un punto; nel terzo, che nel piano ci siano

almeno tre punti non allineati, che si possa riportare un segmento di retta per traslazione senza deformato, e via di questo passo.

Venne così pubblicato *Grundlagen der Geometrie*, in cui veniva fornito un sistema assiomatico completo, fondato su 21 assiomi, per la geometria euclidea. Fatto questo, subito venne dimostrato da Henri Poincaré che la geometria iperbolica, indagata da Giovanni Girolamo Saccheri, fondata correttamente da Nikolaj Ivanovič Lobačevskij e confermata con un modello da Eugenio Beltrami, poteva essere messa in corrispondenza con la geometria euclidea, in modo tale che un'eventuale autocontraddizione dell'una avrebbe causato la rovina anche dell'altra.

Uguaglianza e congruenza

In geometria due **figure** geometriche (triangoli, segmenti, poligoni, ecc...) sono **uguali** se sono esattamente la stessa figura (ovvero se sono lo **stesso insieme di punti**).

Due figure si dicono **congruenti** (dal latino *congruens*: concordante, appropriato), quando hanno la stessa forma e dimensioni, quindi quando sono perfettamente sovrapponibili. Formalmente, sono congruenti quando è possibile trasformare l'una nell'altra per mezzo di una **isometria**, ovvero per mezzo di una combinazione di **traslazioni, rotazioni e riflessioni**.

La **congruenza** di due figure piane si può interpretare visivamente in questo modo: tagliando una figura con le forbici è possibile sovrapporla all'altra in modo che entrambe combacino perfettamente.

Due figure geometriche F_1 ed F_2 **sono congruenti** se, sovrapposte mediante movimenti che non le deformino, coincidono perfettamente. La **congruenza** è una relazione fra due figure piane che mantiene inalterate la forma e l'estensione delle figure.

Nel suo **Grundlagen der Geometrie**, Hilbert descrive la congruenza come una delle tre relazioni binarie primitive della geometria euclidea e ne delinea le proprietà transitiva, riflessiva e simmetrica. Pertanto, la congruenza è una relazione d'equivalenza.

Criteri di congruenza

Tornando ad Euclide egli comincia le sue proposizioni definendo:

il primo criterio di congruenza

Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti due lati e l'angolo tra essi compreso.

Il secondo criterio di congruenza

Due triangoli sono congruenti se hanno un lato e due angoli a esso adiacenti rispettivamente congruenti.

il terzo criterio di congruenza.

Due triangoli sono congruenti se hanno tutti i lati ordinatamente congruenti.

Quarto criterio di congruenza

Due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti due angoli e un lato.

Ognuno dei criteri rispetta gli assiomi di congruenza:

1. *Proprietà riflessiva:* Ogni figura del piano è congruente a sé stessa $A \cong A$
2. *Proprietà transitiva:* Se una certa figura A è congruente a un'altra figura B e la figura B è congruente alla figura C, allora la figura A è congruente alla figura C

$$A \cong B \vee B \cong C \vee A \Rightarrow A \cong C$$

3. *Proprietà simmetrica:* Se una certa figura A è congruente a B allora B è congruente ad A $A \cong B \Rightarrow B \cong A$

La similitudine

La similitudine è una trasformazione geometrica. Essa lascia inalterata l'ampiezza degli angoli della figura ma cambia le misure dei suoi lati, del perimetro e dell'area. Questa trasformazione, quindi, cambia le misure ma non cambia le forme.

Gli oggetti aventi lo stesso colore sono simili.



Due o più figure sono simili se hanno la stessa forma.

Due poligoni con lo stesso numero di lati si dicono simili se hanno:

- lati corrispondenti in proporzione;
- angoli corrispondenti congruenti.

In simboli:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = k$$

$$\alpha' = \alpha;$$

$$\beta = \beta$$

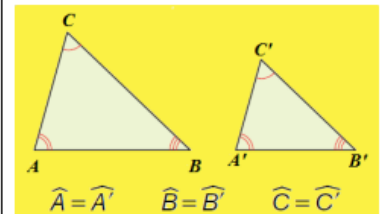
$$\gamma' = \gamma$$

k si dice **rapporto di similitudine**

se $k > 1$ la figura $A'B'C'$ è un ingrandimento della figura ABC ;

se $k < 1$ la figura $A'B'C'$ è una riduzione della figura ABC ;

se $k = 1$ la figura $A'B'C'$ è congruente della figura ABC .



Di similitudine si parla anche nelle piante degli edifici e nelle carte topografiche.

In questo caso il rapporto di similitudine prende il nome di scala.

Ad esempio in una carta nella scala 1: 10.000 se la distanza tra due punti sulla carta vale 1cm, la distanza tra gli stessi due punti sul terreno vale 10.000 cm, cioè 100 m.

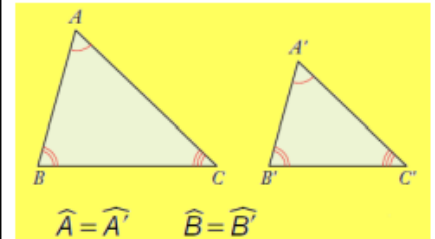
Due triangoli sono simili se hanno tutti gli angoli uguali e i lati corrispondenti in proporzione

Criteri di similitudine dei triangoli

Primo criterio

Due triangoli sono simili se hanno:

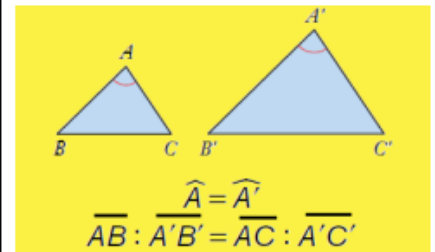
- due coppie di angoli corrispondenti congruenti
 $\alpha' = \alpha$
 $\beta = \beta$



Secondo criterio

Due triangoli sono simili se hanno:

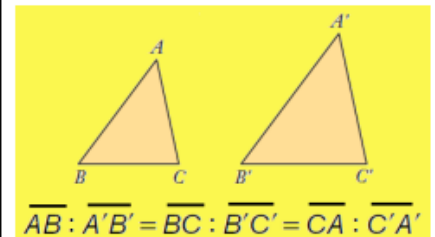
- una coppia di angoli corrispondenti congruenti
 $\alpha' = \alpha$
- i lati che li comprendono in proporzione $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$



Terzo criterio

Due triangoli sono simili se hanno:

- i lati corrispondenti in proporzione
 $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$

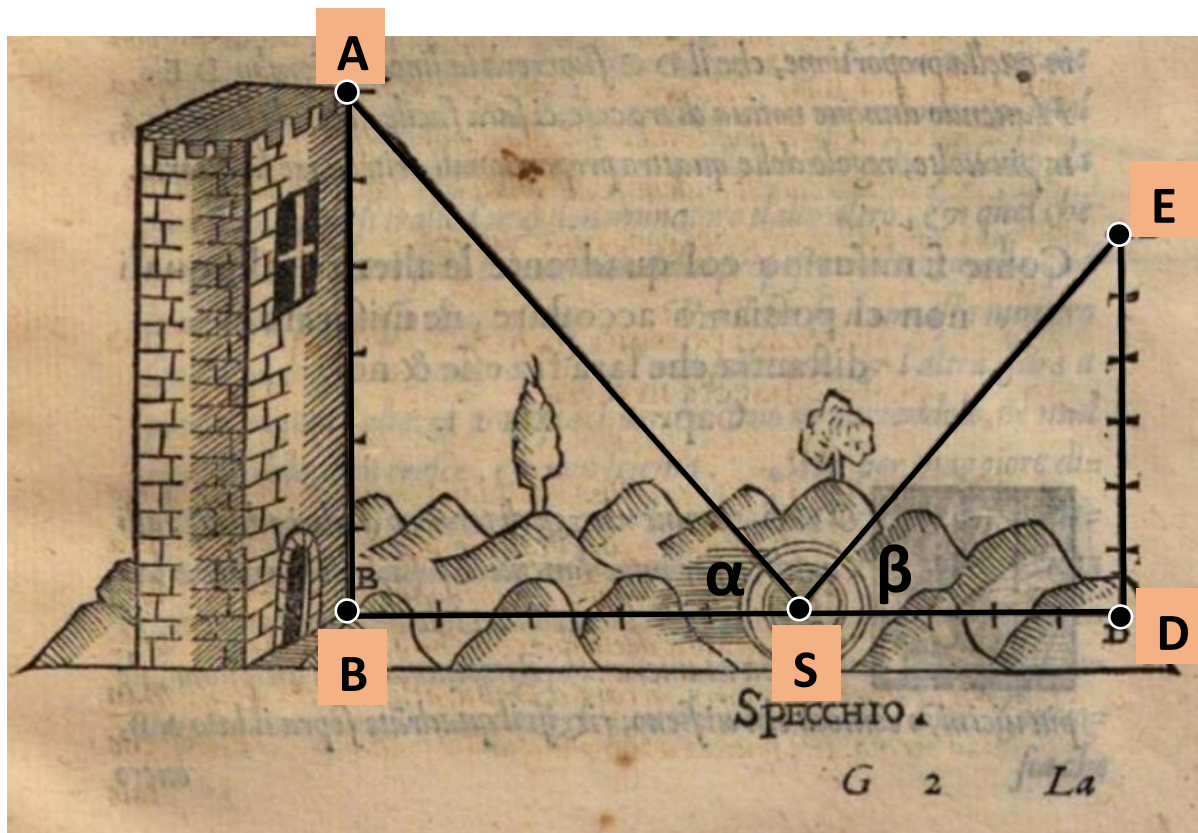


Una curiosità

Già nel Cinquecento, il letterato fiorentino *Cosimo Bartoli* aveva applicato i criteri di similitudine e spiegato come calcolare l'altezza di un edificio servendosi di un semplice specchio.

Nel suo libro *Del modo di misurare le distancie, le superficie, i corpi, le piante, le provincie, le prospettive, & tutte le altre cose terrene, che possono occorrere a gli huomini, secundo le vere regole d'Euclide, & de gli altri piu lodati scrittori*, tra i vari metodi suggerì di porre uno specchio a terra ad una certa distanza dall'edificio e di allontanarsi dallo specchio fino a quando non si sarebbe visto l'edificio specchiato.

Bisogna conoscere la propria altezza e la distanza dallo specchio sia rispetto l'edificio che rispetto l'osservatore.



Gli angoli di riflessione della luce sullo specchio hanno la stessa ampiezza ($\alpha = \beta$), perciò, è come se avessimo formato due triangoli (**SBA e SDE**) rettangoli simili: il primo come cateti la distanza (**SB**) tra l'edificio e lo specchio e l'altezza dell'edificio (**AB**), il secondo avente come cateti la distanza tra l'osservatore e lo specchio (**SD**) e l'altezza (**DE**) che parte da terra fino agli occhi dell'osservatore.

Tramite una semplice proporzione si sarebbe stati in grado di misurare l'altezza di un qualsiasi edificio.

Teorema di Pitagora

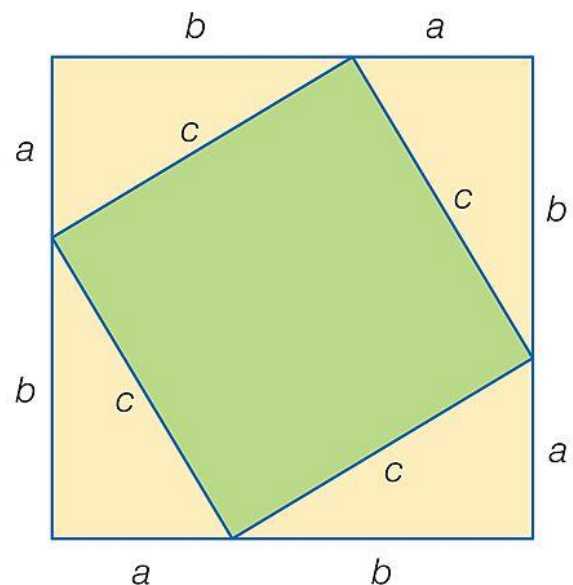
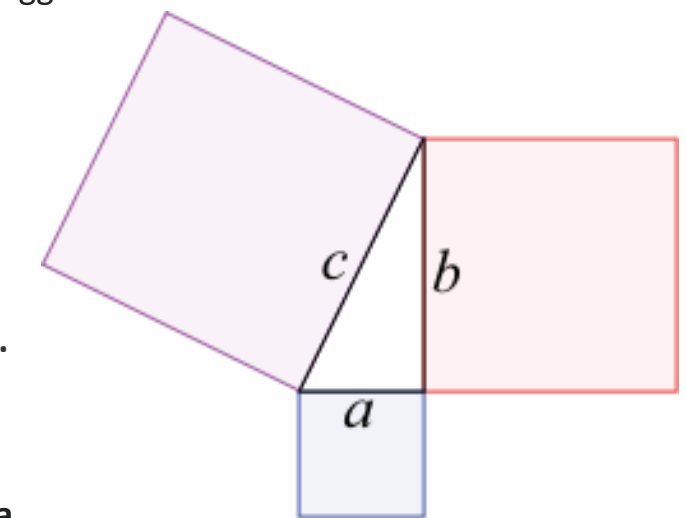
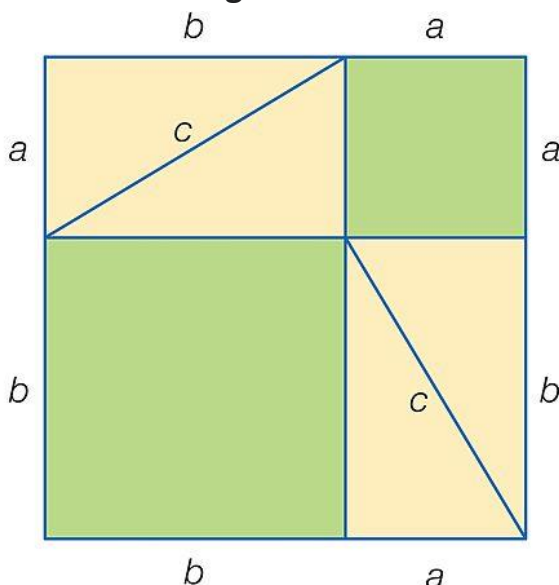
Quello che modernamente conosciamo come *teorema di Pitagora* viene attribuito al filosofo e matematico Pitagora. In realtà il suo enunciato (ma non la sua dimostrazione) era già noto ai Babilonesi.

Viene a volte affermato che il teorema di Pitagora fosse noto agli antichi Egizi ma risulta assente il teorema dai papiri matematici rinvenuti. Era conosciuto anche in Cina e sicuramente in India, come dimostrano molte scritture. Non sono note dimostrazioni del teorema considerate tutt'oggi valide e antecedenti o coeve a Pitagora.

In ogni triangolo rettangolo,
**la somma delle aree dei quadrati
costruiti sui cateti, equivale
all'area del quadrato costruito sull'ipotenusa.**

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Dimostrazione grafica del teorema di Pitagora



Una **terna pitagorica** è una terna di numeri naturali a , b , c tali che $a^2 + b^2 = c^2$. Il nome viene dal teorema di Pitagora, da cui discende che ad ogni triangolo rettangolo con lati interi corrisponde una terna pitagorica e viceversa. (3,4,5) (5,12,13), (7,24,25), (8,15,17), (20, 21,29) ecc.

Alcune terne pitagoriche sono molte famose e certamente erano già conosciute nell'antichità (una loro chi ara traccia è stata ritrovata su una tavoletta d'argilla babilonese) e utilizzate per disegnare gli angoli retti.

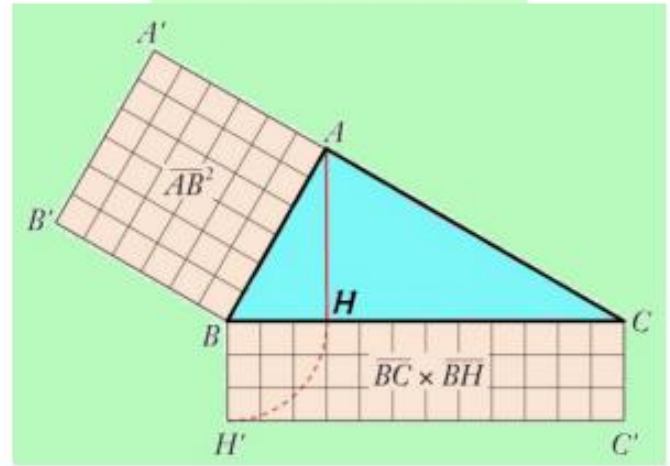
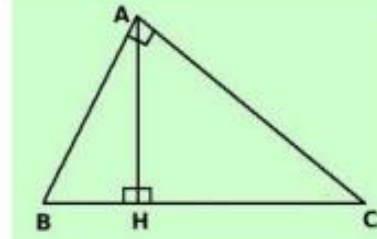
I teoremi di Euclide

Primo Teorema: in un triangolo rettangolo ogni cateto è medio proporzionale fra l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa.

$$\overline{BC} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{BH}$$

$$\overline{BC} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{HC}$$

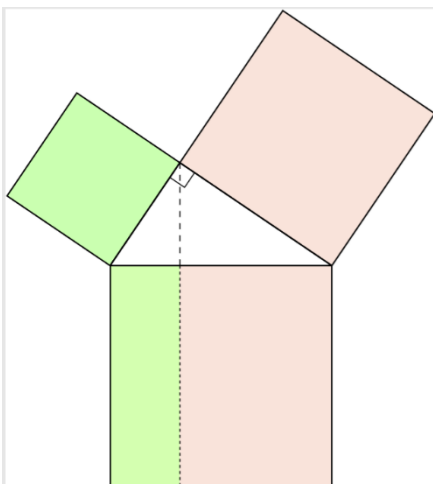
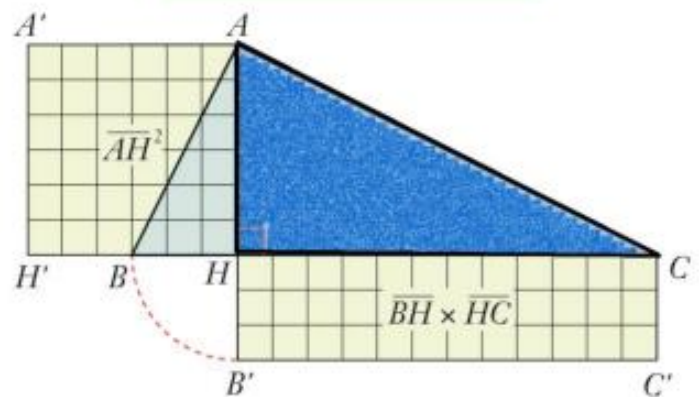
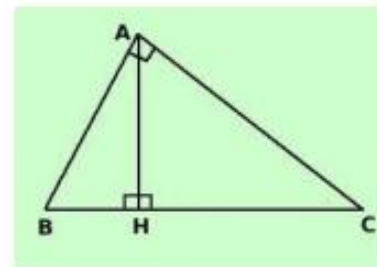
- Interpretazione geometrica:** in ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo avente per lati l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa.



Secondo Teorema: in un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale fra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

$$\overline{BH} : \overline{AH} = \overline{AH} : \overline{HC}$$

- Interpretazione geometrica:** in ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente per lati le proiezioni dei cateti stessi sull'ipotenusa.



Applicando il primo teorema di Euclide su di un cateto e poi sull'altro cateto graficamente risulta ancora una volta dimostrato il teorema di Pitagora

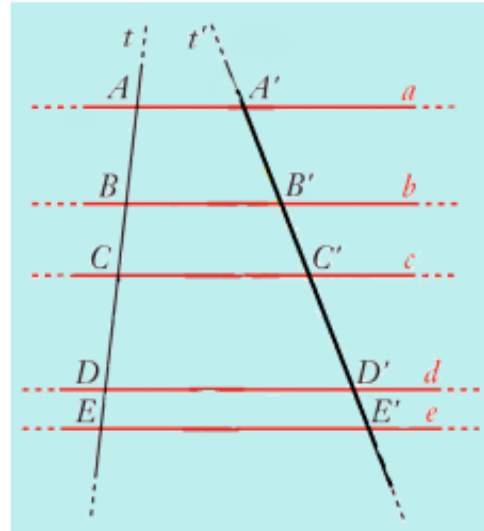
Il teorema di Talete

Un fascio di rette parallele, tagliate da due trasversali, determina sulle trasversali stesse, segmenti corrispondenti in proporzione.

$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{A'B'} : \overline{B'C'}$$

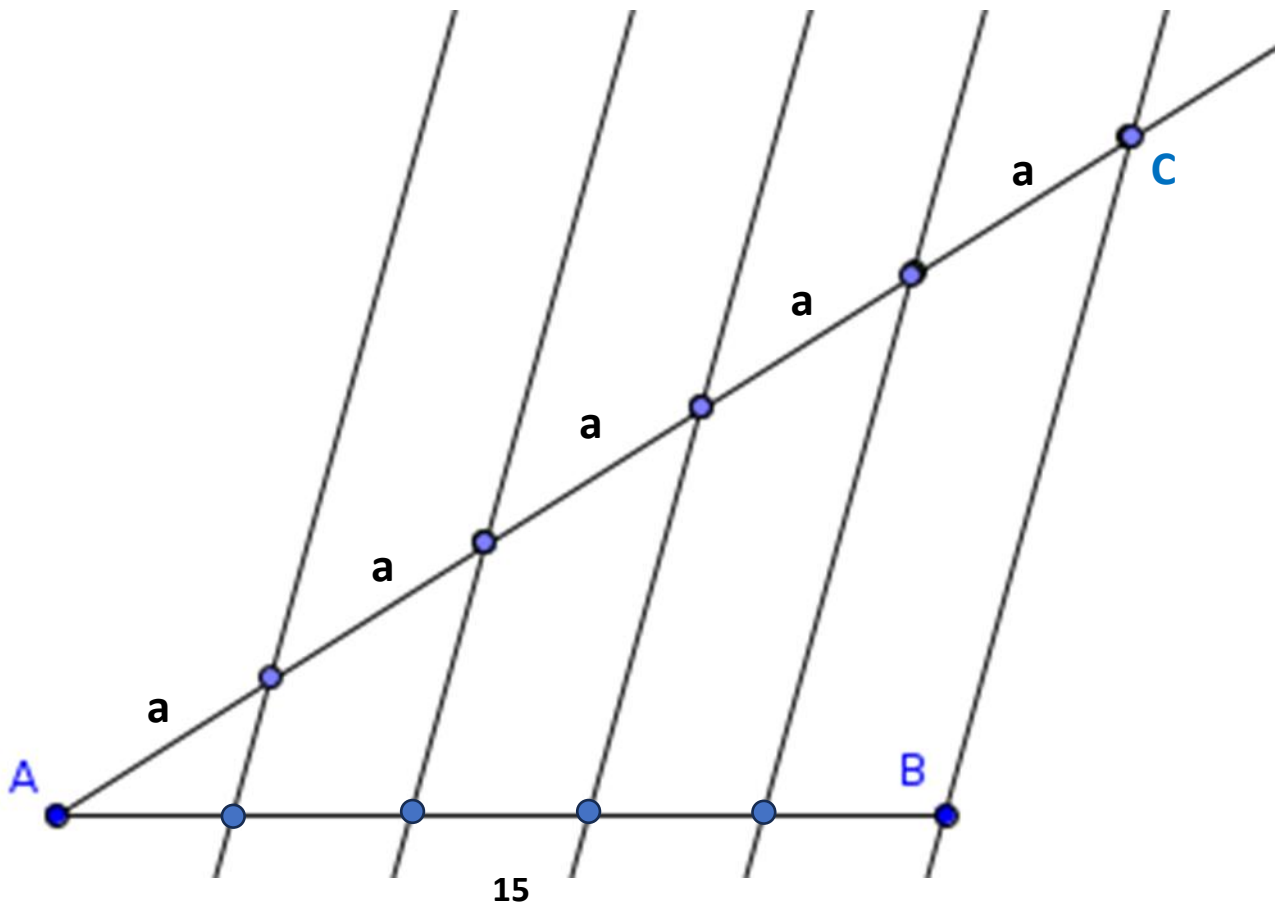
$$\overline{BC} : \overline{AD} = \overline{B'C'} : \overline{A'D'}$$

.....



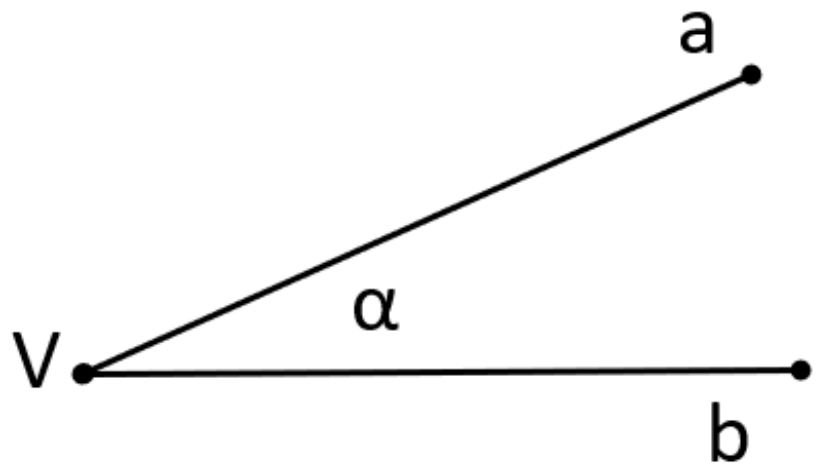
Un'interessante applicazione del teorema di Talete

Devo dividere il segmento AB in 5 parti uguali. Traccio, con un angolo qualsiasi, da **A** una semiretta. Su di essa riporto con il compasso 5 volte il segmento **a** di qualsiasi ampiezza, raggiungendo così il punto **C**. Congiungo **B** con C e traccio delle parallele a questo segmento passanti per gli estremi di **a**. In questo modo il segmento **AB** risulta diviso in 5 parti uguali.

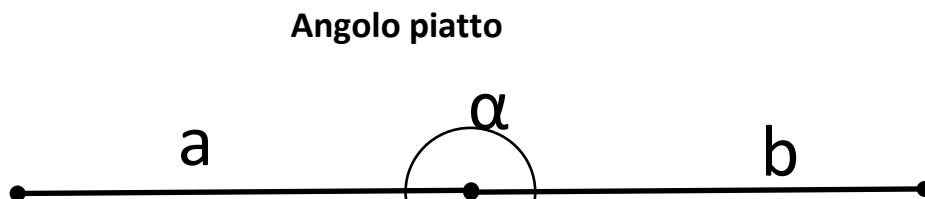


Angoli e loro misura

L'**angolo** è ciascuna delle due parti in cui un piano risulta diviso da due semirette che hanno l'origine in comune.

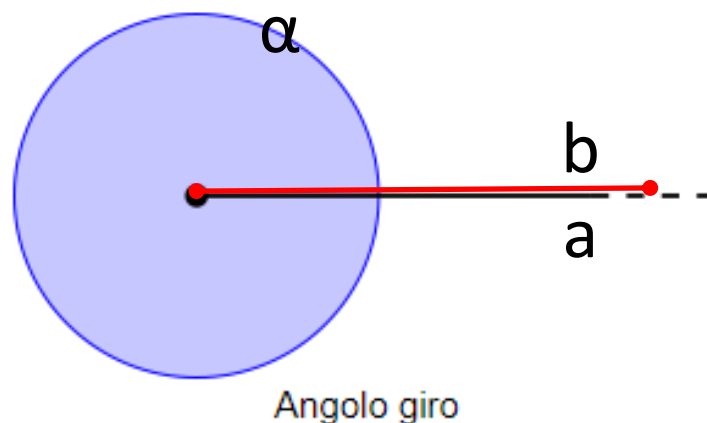


Si dice angolo **piatto** un angolo i cui lati sono semirette opposte.



L'**angolo** retto è la metà di un **angolo** piatto.

L'**angolo giro** è l'angolo che contiene l'intero piano ed è compreso tra due semirette coincidenti. Il punto d'origine delle due semirette è il vertice dell'angolo giro.



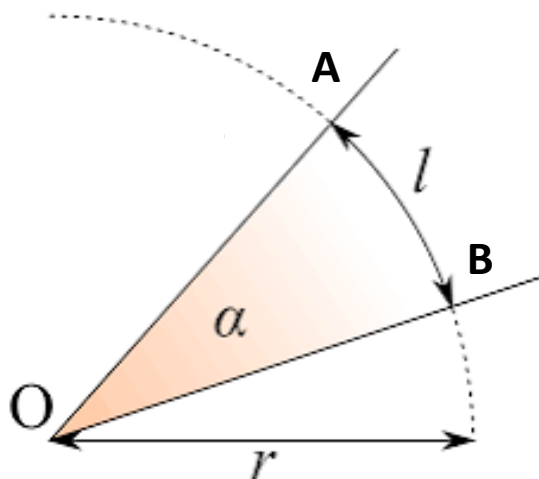
Misura degli angoli

Per misurare gli angoli possiamo utilizzare diverse unità di misura.

Il **grado sessagesimale** si definisce come la **360-esima parte di un angolo giro**. Il simbolo per indicarlo è un piccolo cerchietto scritto come apice ($^{\circ}$)

Il **grado centesimale** o **gradiente**, generalmente indicato con **grad** o **gon** (dal greco $\gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha/g\acute{o}n\acute{\iota}\alpha$ per angolo), è un'unità di misura dell'angolo, facente parte del sistema metrico sviluppato in Francia nel XVIII secolo sotto la spinta di Luigi XVI. Il gon corrisponde a $1/400$ dell'angolo giro ovvero a $1/100$ dell'angolo retto, pertanto $100^g = 90^{\circ}$. Un gon equivale a $9/10$ di un grado sessagesimale ed a $\pi/200$ radianti.

Un **angolo al centro α** di una circonferenza è un angolo che ha il vertice nel centro **O** della circonferenza considerata. I lati dell'angolo intersecano la circonferenza in due punti A e B. Consideriamo l'arco **AB = l**. Diremo che questo arco **corrisponde** all'angolo al centro, e che l'angolo al centro **sottende** l'arco considerato.



Il **radiante** è l'unità di misura (indicata con il simbolo **rad**) degli angoli piani nel **Sistema Internazionale**.

Il **radiante**, definito a partire dall'angolo al centro di una circonferenza, è l'ampiezza dell'angolo al centro che sottende su tale circonferenza un arco di lunghezza uguale al suo raggio.

Se $l = r$ allora $\alpha = 1 \text{ rad}$

La circonferenza $2\pi r$ contiene il raggio r 2π volte

Per cui con la proporzione

$$2\pi^{\text{rad}} : 360^{\circ} = 1^{\text{rad}} : 57,2958$$

Risulta che

$$1 \text{ rad} = 57,2958$$

