# Matematica2

**Dai numeri naturali ai numeri relativi**

**Estensione dell'elevamento a potenza in Z**

**Dai numeri naturali ai numeri razionali, frazioni e numeri decimali**

**Rappresentazione geometrica dei numeri razionali.**

**Estensione dell'elevamento a potenza in Q**

**I numeri irrazionali**

**Esigenza estendere Q e calcolo approssimato di √2**

**Numero algebrico e numero trascendente**

**I numeri complessi**

**A cura di Bruno Pizzamei**

# Dai numeri naturali ai numeri reali

Vogliamo estendere le nostre conoscenze sugli insiemi numerici (N, Z e Q), e successivamente ampliarle a comprendere i numeri irrazionali e i numeri reali.

A tal fine riprenderemo in maniera organica le motivazioni, storiche e non, che hanno portato, a partire dall'insieme dei numeri naturali, all'introduzione di insiemi numerici più vasti.

Vedremo quindi le motivazioni che portarono (e portano) all'introduzione dei numeri irrazionali, sui quali si può operare in maniera consueta.

# Dai numeri naturali ai numeri relativi

I numeri naturali **N = { 0,1,2,3,....}** sono stati creati dalla mente umana per contare gli oggetti di vari insiemi, e non hanno alcun riferimento alle caratteristiche individuali degli oggetti contati; ad esempio il numero **"6"** è un'astrazione di tutti gli effettivi insiemi contenenti **sei oggetti**, e non dipende né dalle qualità specifiche di tali oggetti né dal simbolo utilizzato.

I numeri interi relativi, **Z = { ....,− 2,− 1 ,0 ,+ 1,+ 2,+ 3,....}** di cui si ha traccia già nel VI secolo d.C., sono stati utilizzati per rappresentare grandezze che possono essere considerate in due versi opposti, per la prima volta da Newton nel '600.

Ad esempio:

- la temperatura di una località o di un corpo può essere al disopra o al disotto dello zero (essendo lo 0° la temperatura del ghiaccio fondente);

- l'altitudine di un punto della terra può trovarsi al disopra o al disotto del livello del mare (livello che si assume, per convenzione, come altitudine zero).

A fianco di questa motivazione pratica dell'estensione dei numeri naturali agli interi relativi ve n'è un'altra, più sottile e prettamente aritmetica: nell'insieme dei numeri naturali si possono sempre eseguire le operazioni fondamentali di addizione e moltiplicazione, ma non le **"operazioni inverse",** ossia la sottrazione e la divisione. Limitiamoci per ora a considerare la sottrazione:

la differenza **a − b** dei due numeri naturali **a** e **b**, definita come quel numero naturale **x** tale che **b + x = a** , ha significato solo con la restrizione **a > b** , perché solo in tal caso la differenza **x** è un numero naturale.

I passi fondamentali per rimuovere tale restrizione furono l'introduzione dei simboli **–1, -2, -3,…** e la definizione **a − b = − (b − a)** se **a < b**

Ciò ha reso la sottrazione possibile senza restrizioni nell'insieme dei numeri interi positivi e negativi. Per poter lavorare con questa aritmetica più "estesa" abbiamo dovuto ovviamente definire le operazioni sui numeri interi relativi in modo tale che fossero mantenute le proprietà originarie delle operazioni aritmetiche. Tutte le "regole di calcolo" che permettono di operare con i numeri interi (come la "regola dei segni" per il prodotto, oppure la definizione di differenza tra due interi come somma del primo con l'opposto del secondo) non devono essere "dimostrate", in quanto sono state create dagli uomini per avere libertà nelle operazioni e mantenere le proprietà fondamentali dell'aritmetica; ciò che invece è stato dimostrato (e che anche noi avremmo dovuto dimostrare) è solo che, sulla base di tali definizioni, si mantengono le proprietà commutativa, associativa, distributiva dell'aritmetica.

*Questo "modo di procedere" estendendo un insieme numerico in modo tale che le leggi che valgono nell'insieme originario continuino a valere nell'insieme più esteso prende il nome di procedimento di GENERALIZZAZIONE*.

**I segni + e – rappresentano in questo caso il "verso", la posizione del numero**

Giustifichiamo la regola dei segni.

**I segni + e – rappresentano rispettivamente l'addizione e la sottrazione cioè le operazioni presenti nell'espressione.**

**(+5) + (-3) – (+8)**

È abbastanza logico che nel prodotto (+3) (+7) il risultato sia (+ 21). Voglio eseguire poi il prodotto **(+3) [(+5)+( -5)]** mantenendo per quanto detto sopra (procedimento di GENERALIZZAZIONE) la **legge di annullamento del prodotto** e la **proprietà distributiva.**

**(+5)+( -5) = 0** (somma di due numeri opposti), quindi

**(+3) [(+5)+( -5)] = (+3) (0) = 0**

Applico poi la proprietà distributiva che voglio sia valida anche in questo insieme numerico

**(+3) [(+5)+(-5)] = (+3) (+5)+ (+3)( -5)**

**(+3) (+5) = +15,** il risultato deve essere **0,** per cui devo porre **(+3) (-5) = -15**

**(-3) [(+5)+( -5)] = (-3) (+5)+ (-3)( -5)**

**(-3) (+5) = -15,** il risultato deve essere **0,** per cui devo porre **(-3) (-5) = +15**

Ho così giustificato la famosa regola dei segni:

| | | | |
|---|---|---|---|
| + | + | | + |
| + | - | | - |
| - | + | | - |
| - | - | | + |

Posso a questo punto posso "*confondere*" i segni **+** e **–** di **"*posizione*"** con i segni **+** e **–** di **"*operazione*"**, per cui **(+5) + (-3) – (+8)** diventa più semplicemente **+5 –3 – 8,** posso omettere addirittura il primo **+ (+5) + (-3) – (+8) = 5 –3 – 8**

Vogliamo ora dare significato al simbolo $\mathbf{a^{-n}}$ **,** potenza con esponente negativo che per quanto già detto risulta privo di significato.

Eseguo questa operazione

$$\mathbf{2^2 : 2^3 = (2\ \ 2) : (2\ \ 2\ \ 2\ ) = \frac{2\ 2}{2\ 2\ 2} = \frac{1}{2}}$$

voglio che anche in questo caso siano valide le operazioni con le potenze

$$\mathbf{2^2 : 2^3 = 2^{\,2\text{-}3} = 2^{-1},}$$

impongo quindi $\mathbf{2^{-1}} = \frac{1}{2}$

In generale $\mathbf{a^{-n}} = \frac{1}{a^n}$

# Dai numeri naturali ai numeri razionali

Anche l'introduzione dell'insieme dei numeri razionali,

$\mathbf{Q = \{\ x =} \pm\frac{m}{n}\ |\ \boldsymbol{m, n \in N, n \neq 0\}}$

come estensione dei numeri interi è stata dettata da una doppia necessità.

Una necessità pratica, cioè quella di non dover soltanto contare singoli oggetti, ma di dover misurare delle quantità, come lunghezze, aree, pesi, tempi; tali misure ammettono suddivisioni in parti "*piccole quanto si vuole*".

Per risolvere il problema, il primo passo è ridurre la questione del misurare al problema del contare.

Cominciamo con lo scegliere un'unità di misura del tutto arbitraria, secondo, metro, grammo, a seconda del caso, a cui attribuiamo la misura 1.

Contiamo poi il numero di tali unità che sono contenute nella quantità da misurarsi. Un certo corpo, ad esempio, può pesare esattamente 54 grammi. In generale, però, questo procedimento non conduce ad un risultato esatto, cioè la quantità data non avrà una misura che si possa esprimere esattamente con multipli interi dell'unità di misura prescelta. Al massimo potremo dire che essa è compresa tra due multipli successivi dell'unità, ad esempio tra 32 e 33 grammi. Quando questo accade, si compie un altro passo introducendo nuove unità di ordine inferiore, ottenute con la suddivisione dell'unità originaria in un numero **n** di parti uguali.

Nel linguaggio ordinario queste nuove unità possono avere nomi speciali; ad esempio, il metro si suddivide in 10 decimetri, l'ora in 60 minuti, etc.

In matematica, comunque, un'unità di ordine inferiore ottenuta suddividendo l'unità originaria in **n** parti uguali si indica con il simbolo $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}}$;

e se una data quantità contiene esattamente **m** di queste unità di ordine inferiore, la sua misura si indica con il simbolo $\frac{m}{n}$.

Tale simbolo si chiama **frazione**.

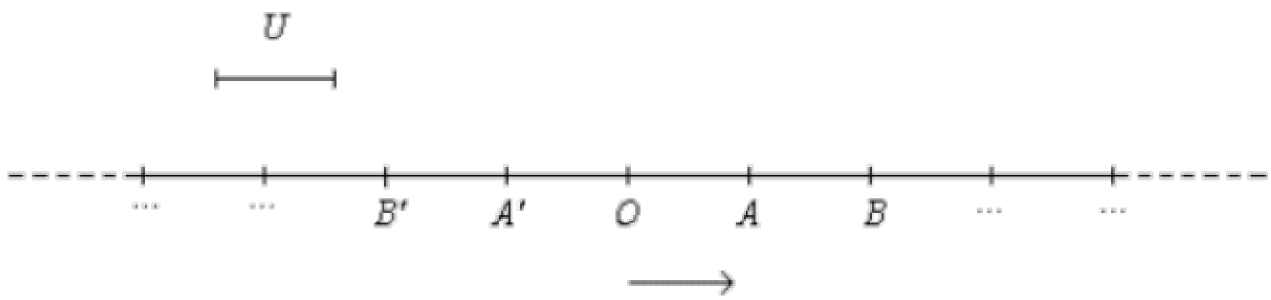
L'altra motivazione per l'estensione dei numeri interi ai numeri razionali è prettamente aritmetica, e deriva dal fatto che in **Z** il quoziente tra due numeri **a** e **b** è definito solo se esiste un terzo numero intero **q** tale che **b · q = a** , ossia se **b** è un **divisore** di **a**.

L'introduzione del simbolo $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$, detto **frazione**, che per definizione è tale che $\mathbf{b} \bullet (\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}) = \mathbf{a}$, risolve il problema (restando l'unica restrizione **b ≠ 0** ). Anche nel caso dei numeri razionali, come nel caso degli interi relativi, abbiamo a suo tempo definito le operazioni su di essi in modo tale da mantenere inalterate le proprietà formali valide in N (**generalizzazione**).

Prima di affrontare il passo successivo, ossia di estendere ulteriormente il nostro insieme numerico Q, soffermiamoci ancora un momento sull'insieme Q stesso per riprenderne la rappresentazione geometrica, poiché ci sarà utile nel seguito.

# Rappresentazione geometrica dei numeri razionali.

Data una retta, fissiamo l'origine **O**, e prendiamo un segmento **U** come unità di misura, ad esempio il centimetro. Riportiamo più volte U consecutivamente a partire da O sia verso destra che verso sinistra:



Ai punti …, B', A', O, A, B,… facciamo corrispondere i numeri interi …,-2, -1, 0, 1, 2,…. Ognuno di tali punti si dice **immagine** del corrispondente numero.

Con procedimento analogo si può determinare il punto immagine di un numero frazionario qualsiasi $\pm \frac{m}{n}$: si costruisce il segmento $\frac{m}{n}$ U e lo si riporta sulla semiretta OA o OA' a seconda del segno. Il termine di questo segmento è il punto immagine della frazione considerata.

È evidente che i punti immagine delle frazioni si inseriscono tra i punti immagine dei numeri interi. Osserviamo un particolare fondamentale:

Per ogni numero intero ne esiste un altro che immediatamente lo precede nella successione ordinata dei numeri interi ed un altro che immediatamente lo segue. Ad esempio il numero intero − 3 è immediatamente preceduto dal numero intero − 4 e seguito dal numero intero − 2 .

Altrettanto non può dirsi per i numeri razionali: considerata una qualunque frazione $\frac{a}{b}$:, se prendiamo un'altra frazione $\frac{m}{n}$, maggiore di $\frac{a}{b}$:, ma ad essa vicinissima (vicina "*quanto vogliamo*"), ne esiste comunque un'altra più vicina di quella da noi considerata.

Partiamo da $$\frac{a}{b} < \frac{m}{n}: \quad (esempio\ \frac{1}{13} < \frac{2}{13})$$

Si può infatti verificare che $$\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+n} < \frac{m}{n}:$$

$$\frac{1}{13} < \frac{1+2}{13+13} < \frac{2}{13}, \quad \text{quindi} \qquad \frac{2}{26} < \frac{3}{26} < \frac{4}{26}$$

Questa proprietà si esprime dicendo che L'insieme dei numeri razionali è un **insieme denso**: per ogni coppia di numeri razionali ne esistono infiniti altri tra essi compresi.

Il numero razionale può essere espresso oltre che come frazione anche come numero decimale.

Consideriamo una frazione ridotta ai minimi termini in cui **numeratore** e **denominatore** sono **primi** tra loro, **non** hanno cioè **divisori comuni**.

Per calcolare il numero decimale corrispondente sarà necessario eseguire la divisione tra il numeratore e il denominatore della frazione.

Se tratto una frazione decimale in cui il denominatore è 10 o un suo multiplo o riconducibile a tale in cui il denominatore contiene solamente multipli di 2 e di 5:

$$\frac{7}{10}, \qquad \frac{39}{100}, \qquad \frac{9}{20} = \frac{9}{20} \times \frac{5}{5} = \frac{45}{100}$$

$$\frac{7}{10} = 0,7 \qquad \frac{39}{100} = 0,39 \qquad \frac{9}{20} = 0,45$$

Ottengo in questo caso un **numero decimale finito.**

Se il denominatore contiene divisori diversi da 2 e 5 deriva un **numero decimale periodico semplice:**

$$\frac{7}{11} = 0,63636363$$

Se il denominatore contiene oltre a 2 e 5 anche altri divisori deriva un **numero decimale periodico misto**:

$$\frac{211}{90} = 2,34444444$$

**antiperiodo** **periodo**

Il numero decimale si presenta: **7,$\boxed{2}$$\boxed{65}$65**

**parte intera**

**Da numero decimale a frazione**

$$0,2 = \frac{2}{10} \qquad 0,17 = \frac{17}{100} \qquad 0,094 = \frac{94}{1000}$$

**Da numero decimale periodico a frazione**

**PERIODICO SEMPLICE**
**( SENZA ANTIPERIODO )**

$$0,\overline{2} = \frac{2}{9}$$

$$0,\overline{03} = \frac{3}{99} = \frac{1}{33}$$

**PERIODICO MISTO**
**( CON ANTIPERIODO )**

$$2,8\overline{3} = \frac{283-28}{90} = \frac{255}{90} = \frac{17}{6}$$

$$2,0\overline{45} = \frac{2045-20}{990} = \frac{2025}{990} = \frac{45}{22}$$

Cerchiamo ora di estendere l'operazione di elevamento a potenza.

Abbiamo definito il significato di

$$a^0=1 \qquad a^1=a \qquad a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

Dato che i simboli inizialmente risultano privi di significato, li definisco generalizzando in modo che possa mantenere inalterate alcune proprietà delle operazioni.

Voglio definire ora la potenza con esponente razionale.

$$\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}}}$$

Considero $\mathbf{8^{1/3}}$. Voglio anche in questo caso che siano mantenute le proprietà già definite e cioè nell'elevamento a potenza di una potenza gli esponenti vengono moltiplicati

$\mathbf{8^{1/3} = (2^3)^{1/3} \quad 2^{3 * 1/3} = 2}$

$\mathbf{8^{1/3} = 2}$ ma anche $\sqrt[3]{8^1}$ **= 2** (posso sempre pensare il radicando elevato alla 1)

$$\mathbf{8^{1/3} = \sqrt[3]{8^1} \qquad 2^{1/2} = \sqrt{2} \qquad 3^{1/2} = \sqrt{3}}$$

In generale

$$\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Le potenze con esponente frazionario vengono definite come radici della base della potenza, dove il numeratore dell'esponente è l'esponente della base ed il denominatore dell'esponente è l'indice di radice.

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{7}\right)^4}$$

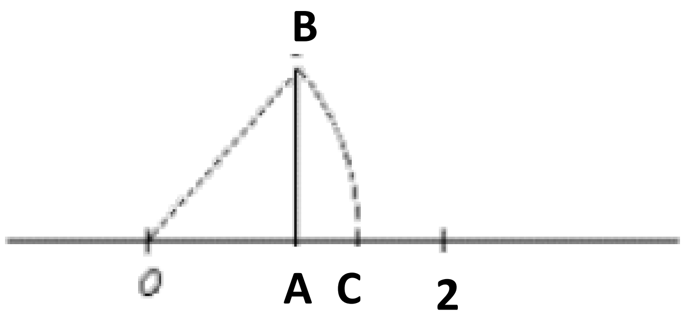
$$\left(\frac{21}{13}\right)^{\frac{9}{2}} = \sqrt{\left(\frac{21}{13}\right)^9}$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(\sqrt{2})^2} = \sqrt[3]{2}$$

# I numeri irrazionali

A questo punto si potrebbe ragionevolmente pensare che i **punti immagine** dei numeri razionali riempiano completamente la retta, invece non è così!!!

Vediamo che sulla retta numerica esistono punti immagine di numeri che non sono razionali.




$OA = 1$

$AB = 1$

$OB^2 = OA^2 + AB^2$

$OB^2 = 2$

$OB = \sqrt{2}$

$OC = OB = \sqrt{2}$

Il punto C è l'immagine del numero $\sqrt{2}$ che dimostreremo non essere un numero razionale.

Supponiamo per assurdo che $\sqrt{\mathbf{2}}$ sia un numero razionale;

allora esisterebbe una frazione $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} = \sqrt{2}$

**m** e **n** sono due numeri primi tra loro che non hanno alcun multiplo in comune,

$\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} = \sqrt{\mathbf{2}}$ **/( )²** $\qquad \frac{m^2}{n^2} = \mathbf{2} \qquad \mathbf{m^2 = 2\,n^2}$

Risulta quindi che $\mathbf{m^2}$ è multiplo di $\mathbf{n^2}$. Ma l'elevamento alla seconda non inserisce altri fattori, duplica quelli che già esistevano, ma **m** ed **n erano** primi tra loro e così pure allora $\mathbf{m^2}$ e $\mathbf{n^2}$. Siamo pertanto giunti ad una contraddizione, e quindi $\sqrt{2}$ non può essere un numero razionale.

## Esigenza "pratica" di estendere Q

Abbiamo la necessità di misurare quantità che non sono esprimibili come frazioni dell'unità di misura;

ad esempio, dobbiamo poter misurare la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti misurino 1 e 2, oppure la lunghezza della diagonale di un quadrato il cui lato abbia misura 1.

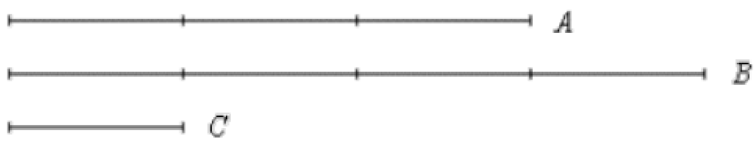
Il problema della misura delle grandezze geometriche è ovviamente fondamentale nella trattazione di tutta la geometria.

*Comunque, dal momento che tale problema è strettamente correlato ai numeri reali lo introduciamo brevemente adesso.*

Un insieme di figure costituisce una classe di **grandezze geometriche** se è possibile definire per esse il concetto di **uguaglianza** e **disuguaglianza**, **somma** e **differenza**.

A seconda delle particolari grandezze che si considerano, variano le definizioni di uguaglianza e somma, ma esse devono essere tali che continuino a valere le note proprietà formali dell'uguaglianza (riflessiva, simmetrica e transitiva) e della somma (commutativa e associativa). Le grandezze appartenenti ad una stessa classe sono dette **omogenee**, quelle appartenenti a classi diverse sono dette **eterogenee**. Ad esempio, costituiscono classi di grandezze omogenee tutti i segmenti, tutti gli angoli, etc.

Due grandezze omogenee si dicono **commensurabili** se esiste una terza grandezza contenuta un numero esatto di volte in entrambe le grandezze considerate (sottomultipla di entrambe). Ad esempio, i segmenti A e B in figura sono commensurabili perché hanno come sottomultipla comune il segmento C .




$A = \frac{3}{4}B$

Il **rapporto** tra due grandezze commensurabili è un **numero razionale**, unico per ogni coppia di grandezze.

Come abbiamo già visto esistono grandezze omogenee incommensurabili, come ad esempio il lato e la diagonale di un quadrato, ed è per poter esprimere il rapporto tra grandezze di questo tipo che si introducono i numeri irrazionali.

Quindi il numero razionale corrispondente al rapporto tra due grandezze commensurabili è un numero razionale assoluto.

### Esigenza estendere Q e calcolo approssimato di $\sqrt{2}$

A livello prettamente aritmetico, la necessità di estendere l'insieme dei numeri razionali nasce ancora una volta dall'esigenza di effettuare senza restrizioni l'inversa di una operazione razionale, ossia dell'elevamento a potenza.

Sappiamo che è possibile estrarre "esattamente" solo la radice n-esima di un numero che sia potenza n-esima, mentre negli altri casi è possibile estrarre la radice solo con un certo grado di approssimazione.

Ad esempio, sappiamo che $\mathbf{(2)^3 = 8}$ e quindi $\sqrt[3]{\mathbf{8}}$ **= 2** ma non possiamo, con le operazioni razionali, calcolare quel numero che elevato alla seconda dia come risultato 2, ossia non possiamo calcolare esattamente $\sqrt{2}$.

Possiamo però utilizzare il seguente metodo per calcolarlo approssimato. Cominciamo con un'approssimazione decisamente "grossolana": consideriamo i due numeri interi dei quali sappiamo estrarre la radice quadrata (che sono cioè quadrati perfetti), che più si avvicinano al numero 2 (per eccesso e per difetto), ossia i numeri 1 e 4;

poiché $\mathbf{1 < 2 < 4}$, risulta $\mathbf{1 < \sqrt{2} < 2}$

Possiamo dunque scrivere che $\sqrt{\mathbf{2}}$ **~ 1**, commettendo un errore di approssimazione che è al più di un'unità. Per approssimarlo meglio procediamo nel seguente modo: calcoliamo:

$(1,2)^2 = 1,44 \quad (1,3)^2 = 1,69 \quad (1,4)^2 = 1,96 \quad (1,5)^2 = 2,25$

quindi $(1{,}4)^2 < \sqrt{2} < (1{,}5)^2$

$(1{,}41)^2 = 1{,}9881 \quad (1{,}42)^2 = 2{,}0164$

quindi $(1{,}41)^2 < \sqrt{2} < (1{,}42)^2$

$(1{,}414)^2 = 1{,}999396 \quad (1{,}415)^2 = 2{,}002225$

quindi $(1{,}414)^2 < \sqrt{2} < (1{,}415)^2$

È evidente che si può continuare in questo procedimento per quanto si vuole, ottenendo via via numeri che approssimano $\sqrt{2}$ sempre meglio.

I numeri utilizzati nel procedimento di approssimazione sono ancora razionali e che tale procedimento può andare avanti indefinitamente.

Ai simboli $\sqrt{2}$ , $\sqrt{5}$ , etc, diamo il nome di **numeri irrazionali**.

Il termine ha origine dalla contrapposizione con razionale, da "ratio" = rapporto (esprimibile tra grandezze omogenee commensurabili, Euclide 300 a.C.).

*N.B.: Quando si lavora sugli irrazionali in realtà si lavora sempre e solo con approssimazioni, e se si vuole la precisione è necessario ricorrere al simbolo* $\sqrt{5}$ .

Su questi nuovi enti, in accordo al principio di generalizzazione, si opera come su quelli già noti col nome di numeri, ossia si definiscono le operazioni ed il concetto di uguaglianza in modo tale che siano conservate le proprietà formali.

## Un esempio di calcolo

Quanto vale il lato di un cubo di volume $12 m^3$

$l^3 = 12 \qquad l = \sqrt[3]{12}. \qquad l = 12^{1/3}$

$\log_{10} 12^{1/3} = 1/3 \log_{10} 12 = 1/3\ 1{,}079181\ldots = 0{,}359727\ldots..$

$\log_{10} l = 0{,}359727\ldots \qquad 10^{0{,}359727} = l \qquad l = 2{,}289428\ldots\ m$

In generale per calcolare $\sqrt[n]{a^m}$ opero nel modo seguente.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = b$$

$$\log_{10} \sqrt[n]{a^m} = \log_{10} b$$

$\log_{10} \sqrt[n]{a^m} = \log_{10} a^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \log_{10} a = c \qquad \log_{10} b = c \qquad 10^c = b$

## Numeri reali

L'insieme dei numeri razionali e dei numeri irrazionali costituisce l'insieme dei **numeri reali.**

I numeri reali possono essere messi in **corrispondenza biunivoca** con i punti di una retta.

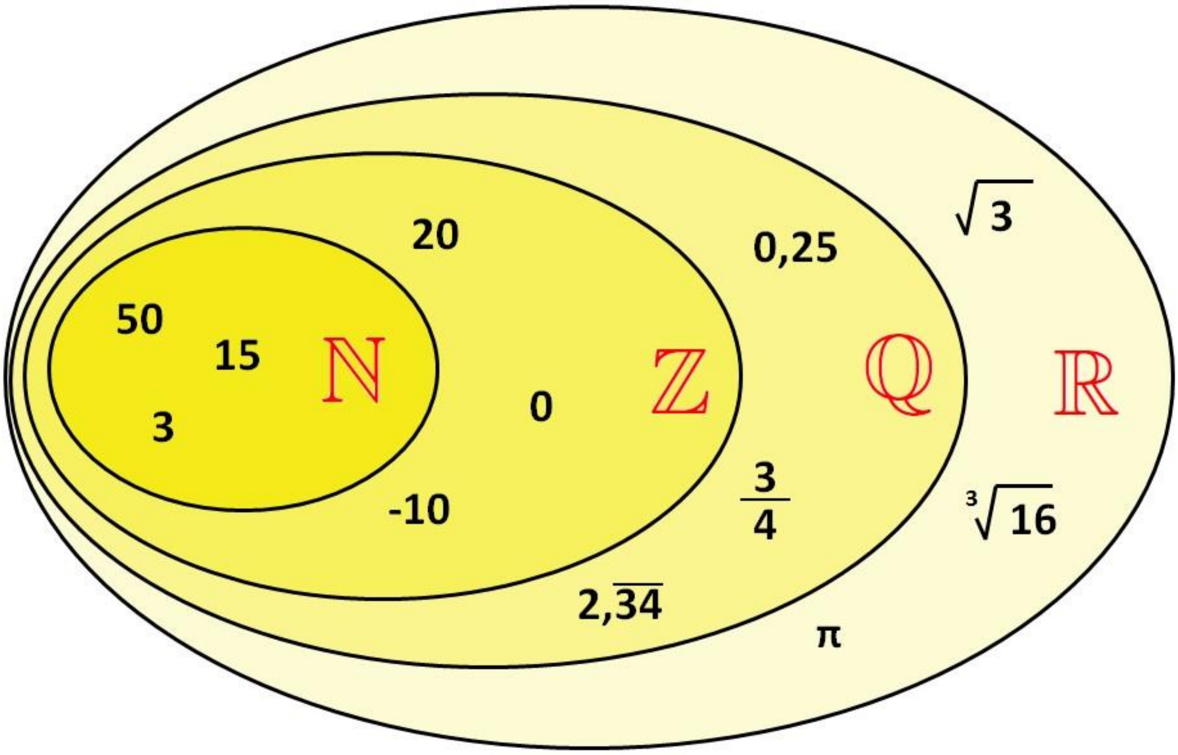
Di fatto, la maggior parte delle volte sono usati solo alcuni sottoinsiemi:

i numeri naturali;

i numeri interi;

i numeri razionali, cioè i numeri esprimibili sotto forma di frazione;

i numeri irrazionali, cioè i numeri che non sono esprimibili sotto forma di frazione, e non fanno quindi parte dei numeri razionali. (numeri algebrici e numeri trascendenti)



Il **numero algebrico è** radice di un'equazione algebrica irriducibile a coefficienti interi:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

dove $n \geq 1$ e i coefficienti $a_i$ sono razionali non tutti nulli.

Un **numero trascendente** è un numero irrazionale che non è un numero algebrico, ossia non è la soluzione di nessuna equazione polinomiale.

Nell'insieme dei numeri reali le operazioni sono eseguibili con un'eccezione.

L'estensione dei campi numerici però non è finita.

Nell'insieme R non è possibile **estrarre radici di indice pari di un numero negativo**.

$$\sqrt{2} = x \qquad x^2=2 \qquad\qquad \sqrt{-2} = y \qquad y^2 \neq -2$$

Dobbiamo quindi estendere ulteriormente i campi numerici e parleremo quindi di **numeri complessi.**

## I numeri complessi.

Come per i sistemi numerici fin qui esaminati, è stato un "bisogno" che ha portato all'introduzione dell'insieme dei numeri complessi: quello di poter operare con le radici dei numeri negativi.

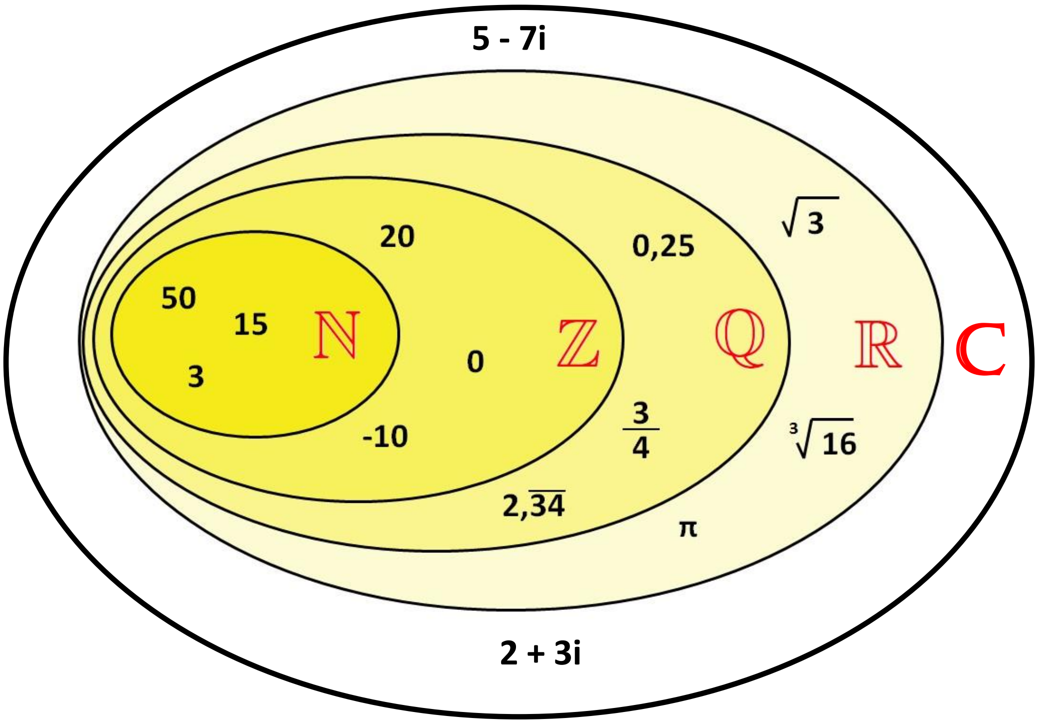
Un **numero complesso** è definito come un numero della forma **a + ib**, con **a** e **b** numeri reali e con **i** una soluzione dell'equazione $x^2 = -1$ cioè $i = \sqrt{-1}$.

**i** è detta **unità immaginaria**.

I numeri complessi sono usati in tanti campi della matematica e in molti campi della fisica in meccanica quantistica.

E' possibile definire l'insieme dei numeri reali come il sottoinsieme dei numeri complessi e costituito dai numeri aventi il coefficiente della parte immaginaria **b** uguale a 0. In simboli

$$R = \{c = a + ib \in C;\ b = 0\ \}$$




Anche in C vengono introdotte le operazioni e le loro proprietà presenti negli insiemi numerici( N, Z, Q, R) precedentemente considerati salvo la proprietà dell'ordinamento. E' in C ha significato anche l'estrazione di radice di indice pari di un numero negativo.

A questo punto ci fermiamo. Non definiamo le operazioni e le loro proprietà in C. Diamo solamente una rapida occhiata alla rappresentazione geometrica del numero reale.

**Rappresentazione geometrica dei numeri complessi**
Dovuta essenzialmente al lavoro di matematici come Argand e Gauss[1], consiste nel riportare su un piano cartesiano la parte reale e la parte immaginaria di un numero complesso, rispettivamente sull'asse delle ascisse e su quello delle ordinate. Si stabilisce così una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri complessi e quello dei punti del piano.