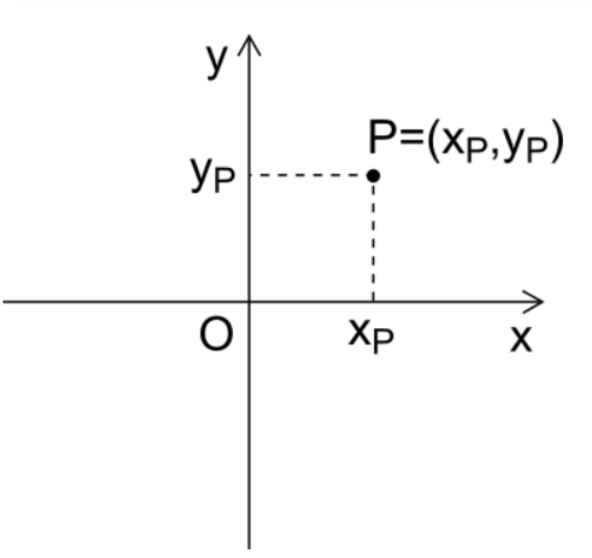
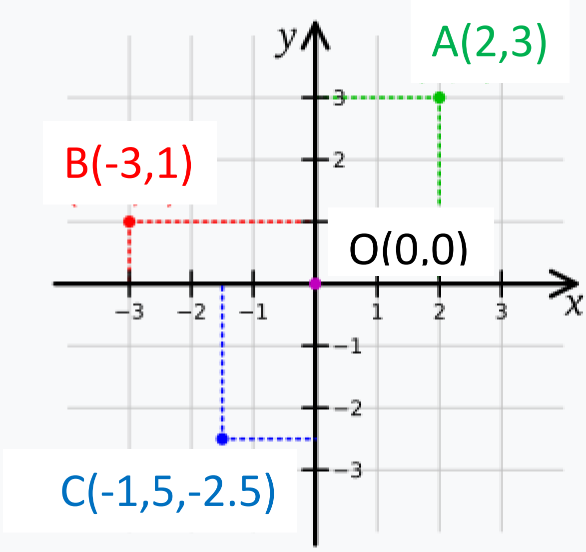
Piano cartesiano, retta, circonferenza, parabola, curva esponenziale

A cura di Bruno Pizzamei

Piano cartesiano





Il piano cartesiano è il piano euclideo reale in cui sia stato definito un sistema di riferimento cartesiano *OXY* formato da due rette perpendicolari (**asse *X***, o delle ascisse, e asse ***Y***, o delle ordinate) **orientate** e dotate di **unità di misura**, il cui punto di intersezione *O* è detto ***origine*** del riferimento.

In questo modo esiste una corrispondenza biunivoca tra ogni punto del piano e una coppia ordinata di numeri reali (***x, y***) detti **coordinate del punto**. Le relazioni e le proprietà geometriche possono essere studiate quindi con metodi algebrici e analitici.

L'uso delle coordinate geometriche venne introdotto per la prima volta da Nicola d'Oresme, matematico del XIV secolo operante a Parigi. L'aggettivo *cartesiano* è riferito al matematico e filosofo francese René Descartes (latinizzato in *Cartesius*, italianizzato in *Cartesio*), il quale, tra le altre cose, riprendendo gli studi di Nicola d'Oresme, lavorò sulla fusione dell'algebra con la geometria euclidea. Questi studi furono influenti nello sviluppo della geometria analitica, del calcolo infinitesimale e della cartografia.

L'idea di questo sistema di riferimento fu sviluppata nel 1637 in due scritti da Cartesio e, indipendentemente, da Pierre de Fermat, anche se Fermat non pubblicò la sua scoperta. Nella seconda parte del suo Discorso sul metodo, Cartesio introduce la nuova idea di specificare la posizione di un punto o di un oggetto su una superficie usando due rette che si intersecano in un punto come strumenti di misura, idea ripresa in *La Geometria*.

Geometria analitica

È un metodo matematico per la rappresentazione e lo studio delle proprietà di enti geometrici (punti, linee, superficie, ecc.) per mezzo di relazioni analitiche. Quali suoi fondatori possono specialmente considerarsi Cartesio e Fermat.

Il primo problema della geometria analitica è quello di rappresentare la posizione di un punto per mezzo di alcuni numeri (che prendono il nome di coordinate).

Tale rappresentazione può farsi in modi assai svariati. Di questi il più ordinariamente usato è il metodo delle coordinate cartesiane, che si può usare sia per la geometria del piano sia per quella dello spazio.

Usando un sistema di riferimento cartesiano, è possibile descrivere tramite equazioni algebriche forme geometriche come curve o superfici: i punti dell'oggetto geometrico sono quelli che soddisfano l'equazione associata. Per esempio è possibile descrivere una retta, una circonferenza nel piano cartesiano ecc.

Luogo geometrico

Un **luogo geometrico** è l'insieme di tutti i punti del piano o dello spazio che godono di una certa proprietà; tale può essere espressa sotto forma di equazione o di formula matematica,

Abbiamo luoghi geometrici del piano e dello spazio.

La circonferenza è il luogo dei punti del piano per cui è fissa la distanza da un dato punto, il centro.

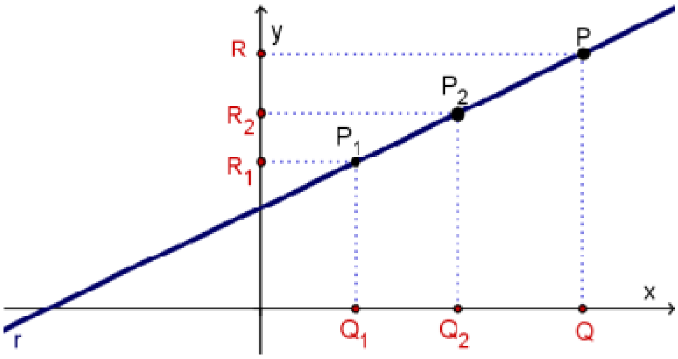
La sfera è il luogo dei punti dello spazio per cui è fissa la distanza da un dato punto, il centro.

Equazione della retta

La **retta** è il luogo dei **punti** del piano **allineat**i con due punti fissi e che soddisfano all'equazione: **ax + by + c = 0**

La forma implicita della retta

Consideriamo poi il caso di una generica retta r del piano non parallela agli assi.
Fissiamo su essa due punti $P_1(x_1;\ y_1)$ e $P_2(x_2;\ y_2)$ e consideriamo poi un terzo punto $P(x;\ y)$ variabile su di essa.



Per il teorema di Talete si ha:

$$\frac{Q_1Q}{Q_1Q_2} = \frac{P_1P}{P_1P_2} \quad e \quad \frac{P_1P}{P_1P_2} = \frac{R_1R}{R_1R_2} \quad \underset{\text{Per la proprietà transitiva}}{\Longrightarrow} \quad \frac{R_1R}{R_1R_2} = \frac{Q_1Q}{Q_1Q_2}$$

cioè: $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ **Condizione di allineamento di tre punti**

Risolvendo la quale si ricava:

$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (x_2 - x_1)(y - y_1)$ $\quad (y_2 - y_1)\,x + (x_1 - x_2)y - x_1y_2 + x_2y_1 = 0$

Ricordando che: $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2$ sono numeri noti, e ponendo: $a = y_2 - y_1$ $\quad b = x_1 - x_2$ $\quad c = -x_1y_2 + x_2y_1$

Si ottiene: $ax + by + c = 0$.

La forma esplicita della retta

La forma esplicita della retta

L'equazione $ax + by + c = 0$ è detta forma implicita della retta.

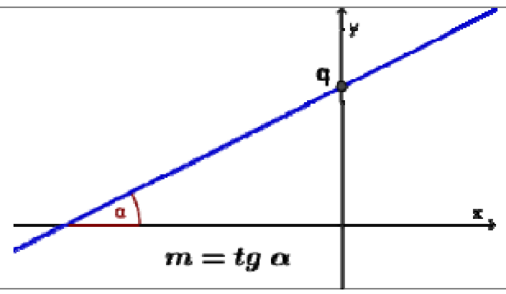
Se ricaviamo l'equazione rispetto alla variabile y si ottiene la forma esplicita della retta.

$$ax + by + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b} & se\ \ b \neq 0 \\ ax + c = 0 & se\ \ b = 0 \end{cases}$$

Ponendo: $\begin{cases} m = -\frac{a}{b} \\ q = -\frac{c}{b} \end{cases}$ si ottiene la forma esplicita $y = mx + q$

Il coefficiente $\boldsymbol{m}$ è detto coefficiente angolare.

Il coefficiente $\boldsymbol{q}$ è detto ordinata all'origine.



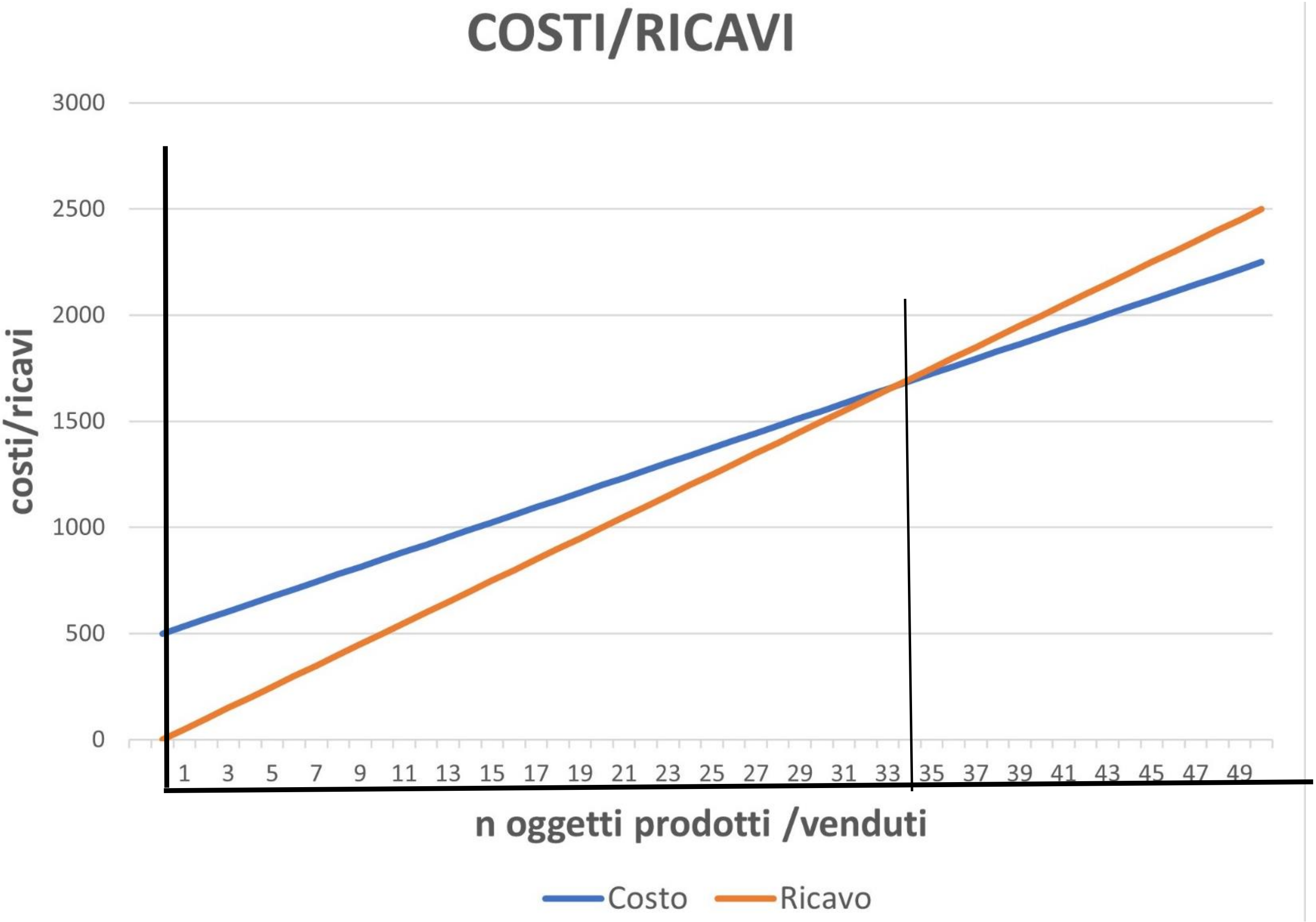
Un esempio di dipendenza lineare

Immaginiamo di dover produrre alcuni oggetti. Devo spendere **500 €** per iniziare la produzione e ogni oggetto costa **35 €**.

Per produrre un certo numero **n** di oggetti il costo **C** sarà funzione del numero di oggetti prodotti: **C =f(n),** una funzione lineare rappresentata graficamente da una retta quindi **C = 35n + 500** ➡ **[y = mx + q]**

Quando rivendo gli oggetti al prezzo unitario di **50 €** il ricavo **R** sarà anche in questo caso funzione del numero di oggetti vendutii: **R =f(n)** e funzione lineare rappresentata graficamente da una retta quindi **R = 50 n** ➡ **[y = mx + 0]**

La situazione è ben rappresentata dal grafico.



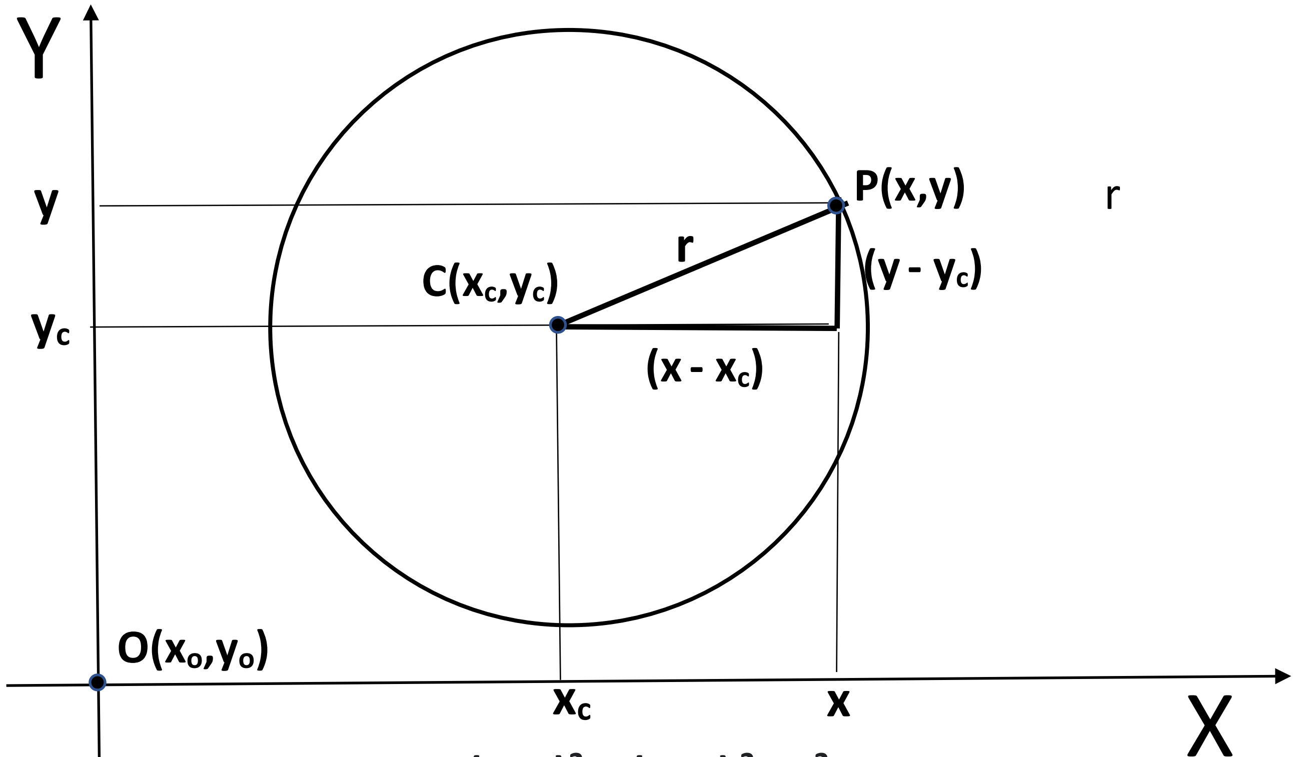
Dal grafico si ricava che si incomincia a guadagnare dopo aver venduto 34 oggetti.
Il dato si ricava dalla soluzione delle equazioni.

C = 35n + 500 R = 50 n C = R 35n + 500 = 50 n 500 = 50n -35n

500 = 15n n = 500/15 n = 33,33… da cui per guadagnare deve essere **n > 33**

Equazione della circonferenza

La **circonferenza** è il luogo dei punti del piano aventi la **stessa distanza**, detta raggio (r), da un punto fisso C, detto centro. La superficie piana racchiusa da una circonferenza è detta cerchio.



$$(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = r^2$$

$$x^2-2xx_c+x_c^2+ y^2-2yy_c+y_c^2 = r^2$$

$$-2x_c = a \quad -2y_c = b \quad - r^2+x_c^2+ y_c^2= c$$

$$x^2 + y^2+ ax + by + c = 0$$

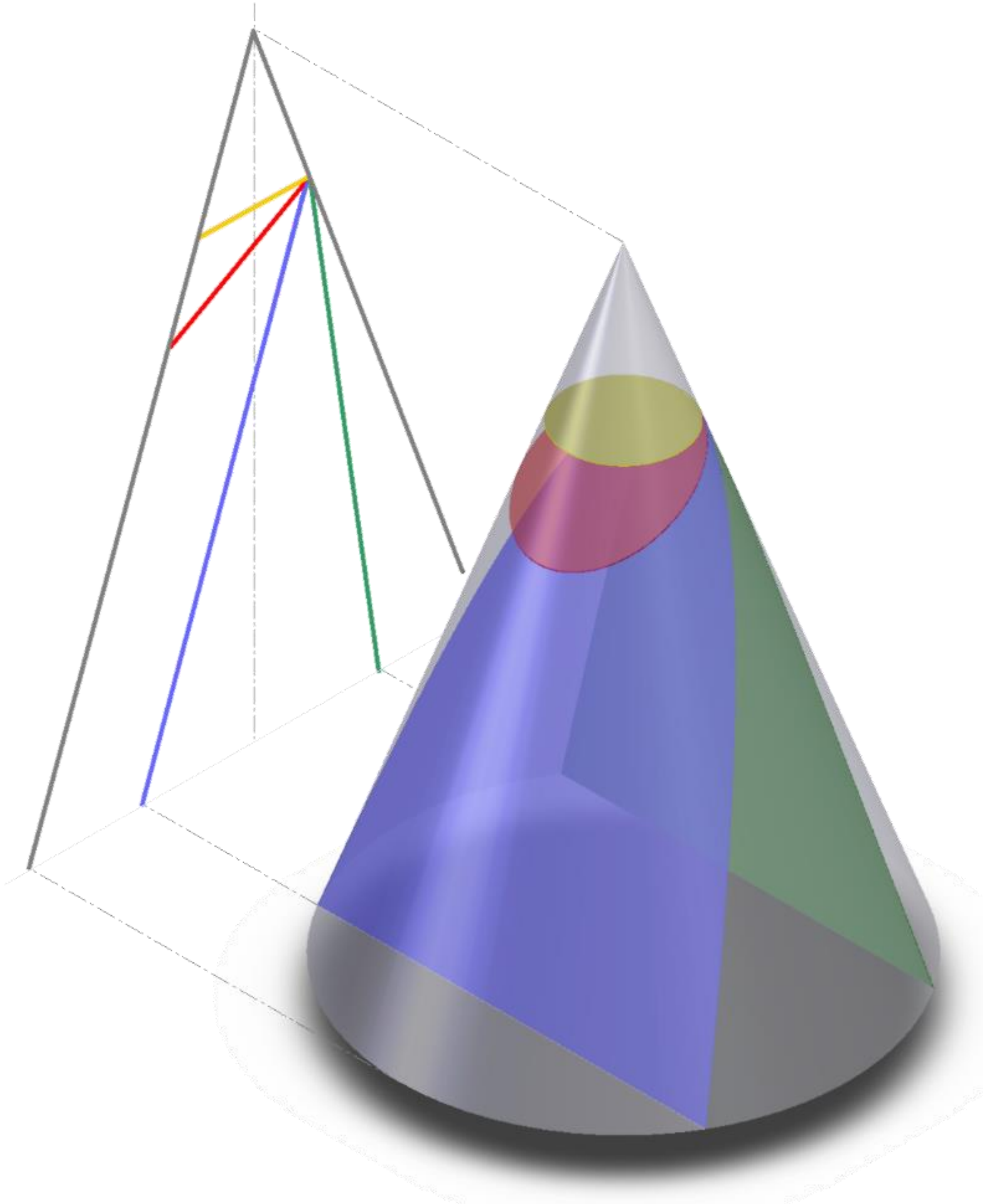
Se il centro della circonferenza coincide con l'origine degli assi per cui $x_c = 0$ **e** $y_c = 0$ e l'equazione diventa

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Sezioni coniche

In matematica, e in particolare in geometria analitica con **sezione conica**, o semplicemente **conica**, si intende genericamente una curva piana che sia luogo dei punti ottenibili intersecando la superficie di un cono circolare con un piano.

Tipi di sezioni coniche: i piani, intersecando il cono, descrivono una circonferenza (in giallo), un'ellisse (in rosso), una parabola (intersezione con un piano parallelo ad una retta generatrice, in blu) e un'iperbole (in verde)



Equazione della parabola

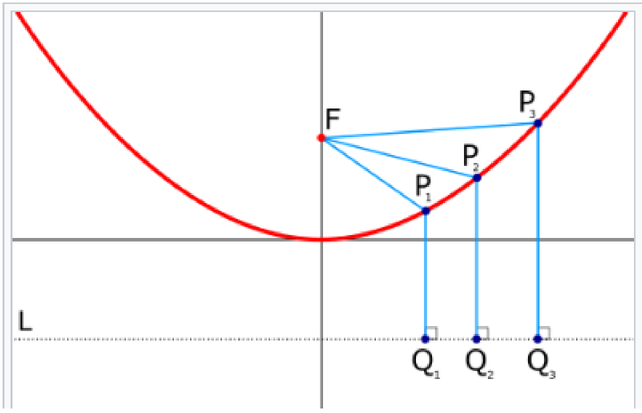
Una **parabola** può anche essere definita come luogo geometrico nel modo seguente.

> Una **parabola** è l'insieme dei punti del piano equidistanti da una retta d (detta **direttrice**) e da un punto F (detto **fuoco**) non contenuto in d.

In altre parole, una parabola è l'insieme dei punti P tali che, indicata con Q la proiezione ortogonale di P sulla retta d, sono uguali tra loro le lunghezze dei segmenti

$$\overline{PF} = \overline{PQ}.$$

- La retta passante per F e ortogonale alla direttrice costituisce l'**asse di simmetria** della curva.
- L'intersezione dell'asse di simmetria con la parabola, punto medio tra il fuoco e la sua proiezione sulla direttrice, si dice **vertice della parabola**.



Equazione della parabola con vertice nell'origine e asse di simmetria coincidente con l'asse *y*

Sia $p > 0$ la distanza fuoco-direttrice.

Il fuoco ha coordinate $F\left(0; \dfrac{p}{2}\right)$.

La direttrice d ha equazione $y = -\dfrac{p}{2}$.

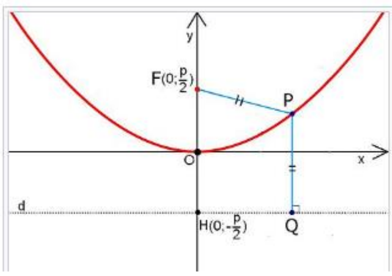
Il punto $H\left(0; -\dfrac{p}{2}\right)$ è la proiezione ortogonale di F su d.

Il punto medio di FH è $O(0;0)$ ed esso appartiene alla parabola essendo equidistante dal fuoco e dalla direttrice.

Tale punto è detto vertice della parabola.

Per la definizione di parabola il punto $P(x;y)$ appartiene alla parabo!a se e solo se la distanza dal fuoco $d(P,F)$ è uguale alla distanza dalla direttice $d(P,Q)$ e dunque $d(P,F) = d(P,Q)$ dove Q è la proiezione ortogonale di P sulla direttrice:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-\frac{p}{2})^2} = \left|y + \frac{p}{2}\right|.$$



Elevando al quadrato e dopo opportune semplificazioni si ottiene $2py = x^2$ da cui $y = \dfrac{1}{2p}x^2$.

Posto $a = \dfrac{1}{2p}$ si ottiene la nota equazione elementare della parabola

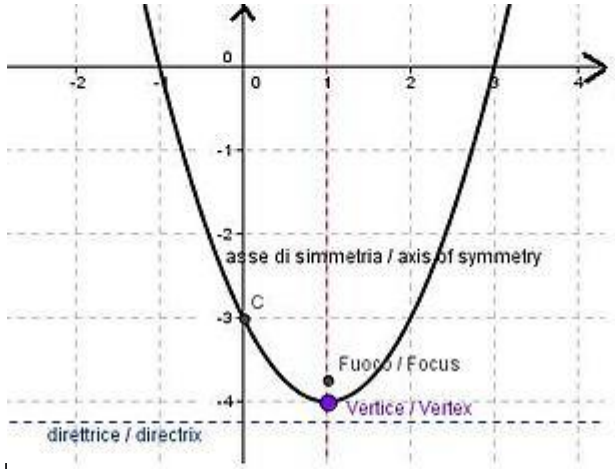
$$y = ax^2.$$

Questa parabola ha vertice nell'origine degli assi cartesiani e asse di simmetria coincidente con l'asse delle ordinate (asse y).

Rispetto al parametro a il fuoco ha coordinate $F\left(0; \dfrac{1}{4a}\right)$ e la direttrice ha equazione $y = -\dfrac{1}{4a}$.

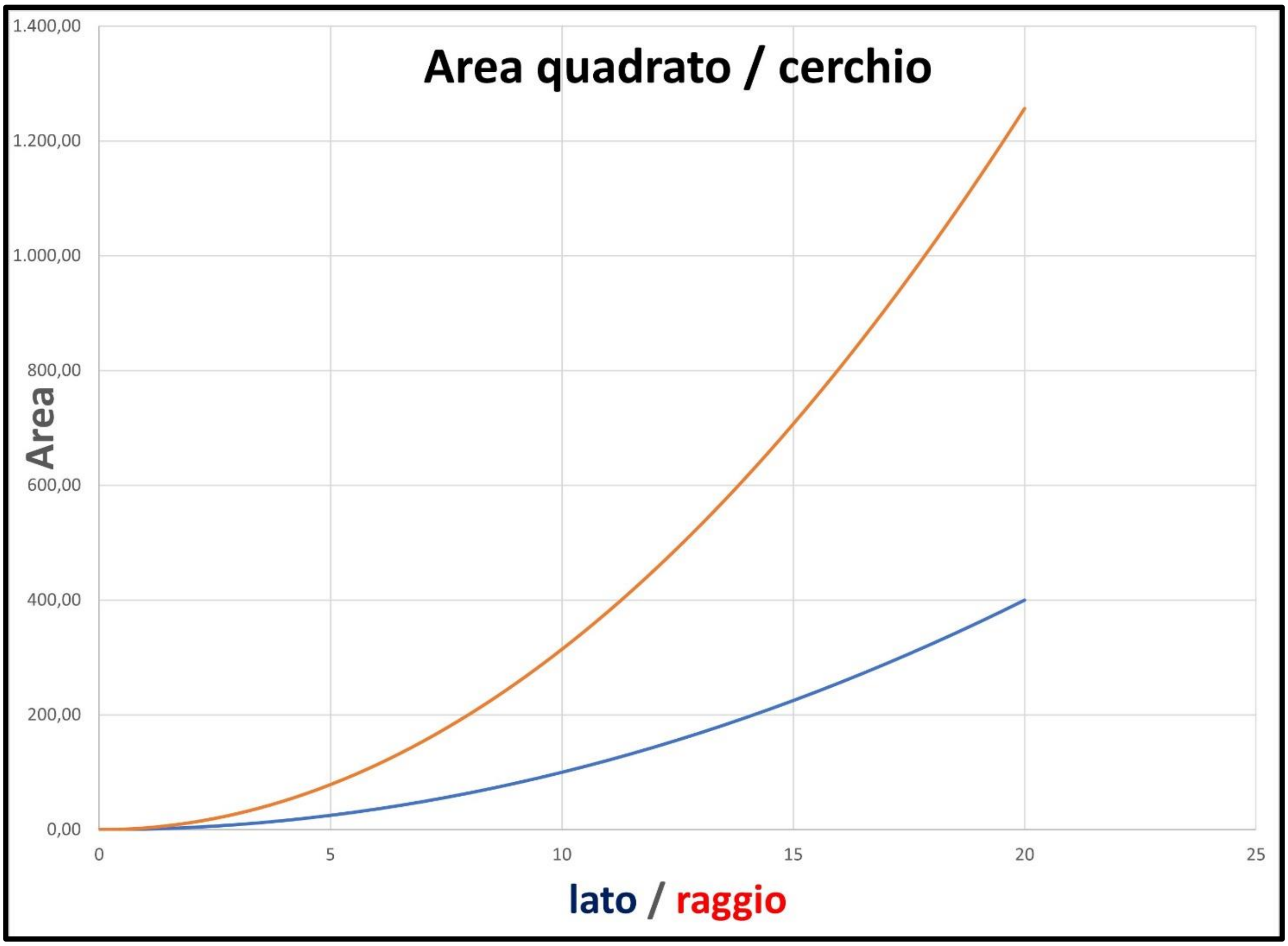
L’equazione della parabola con vertice in un punto qualsiasi del piano e con l’asse di simmetria parallelo all’asse Y diventa:

$y = ax^2 + bx + c$



Il coefficiente ***a*** determina la convessità della parabola, il coefficiente ***b*** è legato alla posizione dell *asse* della parabola (la retta verticale passante per il vertice), il coefficiente ***c*** determina il punto di intersezione della parabola con l'asse delle ordinate.

Un esempio di dipendenza quadratica



$\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$

Area del quadrato di lato l.......$\mathbf{A_q = l^2}$ ➡ $\mathbf{[\ y = 1\,x^2 + 0x + 0]}$

Area del cerchio di raggio r ....$\mathbf{A_c = r^2\,\pi}$ ➡ $\mathbf{[\ y = \pi\ x^2 + 0x + 0]}$

La funzione esponenziale

Fissato un numero reale con **a > 0** e **a ≠1** si chiama **funzione esponenziale** di base **a** la funzione di equazione **$y = a^x$**, il cui dominio è **R** e il cui codominio è **R^+ - {0}**

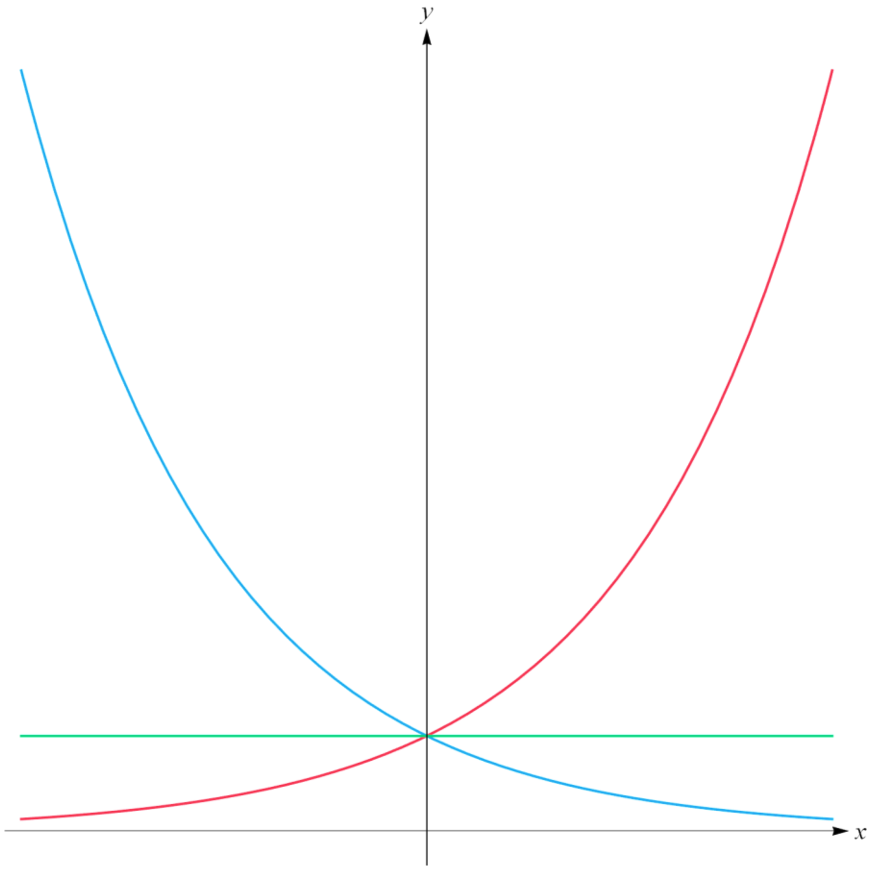
Se a = 1 , poiché $1^x = 1$, la funzione esponenziale degenera nella retta parallela all'asse X di equazione y = 1.

Il seguente grafico mostra l'andamento della funzione esponenziale al variare di a, compreso il caso degenere a = 1.

$y = a^x$ con $0 < a < 1$

$y = a^x$ con $a > 1$

$y = a^x$ con $a = 1$



Da un punto di vista matematico: una funzione esponenziale è una funzione in cui la variabile indipendente **(x)** compare all'esponente.

- $y = b^*$

a differenza di quanto accade in una funzione lineare in cui la variabile indipendente ricopre un ruolo di fattore moltiplicativo

- $y = b\,x$

In altre parole, si dice che una grandezza cresce esponenzialmente quando ad intervalli di tempo uguali corrispondono incrementi pari ad una frazione costante del totale.

Approfondiamo il concetto di grandezze che crescono esponenzialmente entrando in economia per parlare di interesse, capitale e montante.

Definizione di interesse e suo calcolo

In finanza, il termine **interesse** si riferisce al profitto generato dall'impiego di capitale. L'interesse esprime la redditività di un investimento o il costo di un credito. Possiamo distinguere due regimi di calcolo dell'interesse:

- *la capitalizzazione semplice*
- *la capitalizzazione composta*

L'interesse semplice

Si dice che una grandezza cresce linearmente quando ad intervalli di tempo uguali corrispondono incrementi uguali.

Ad esempio, è lineare l'incremento dei risparmi di una persona che risparmia e mette da parte ogni anno 1.000 €: Dopo un anno si troverà con 1.000 € di risparmi, dopo due anni con 2.000 €, dopo tre anni con 3.000 € e così via.

Nel regime a capitalizzazione semplice, il profitto ottenuto da un investimento è calcolato in base al capitale iniziale, al tasso di interesse ed al tempo.

In particolare, l'interesse semplice**(I)** è ***proporzionale*** **al tempo dell'investimento(t), al capitale investito(C) oltre ovviamente al tasso d'interesse(i)**.

La rendita ottenuta dal capitale in un dato periodo cioè non viene aggiunta al capitale iniziale e quindi non maturerà ulteriori interessi nel periodo successivo.

La formula per calcolare l'interesse è la seguente:

$$I = C\ i\ t$$

Il montante **M** è costituito dal capitale iniziale e degli interessi maturati nell'intervallo di tempo: **M = C + I**

$$\overset{y}{M} = \overset{q}{C} + [\overset{m}{C\ i}]\,\overset{x}{t} \quad \Longrightarrow \quad [\, y = mx + q \,]$$

$$M = C(1+it)$$

Comprendiamo meglio l'interesse semplice con un esempio.
Supponiamo si debba prestare a Tizio 10.000€ che lui terrà per 30 anni pagando un tasso d'interesse del 5% annuo.
L'interesse totale che Tizio dovrà corrispondere sarà calcolato solo sui 10.000€ e non anche sugli interessi maturati di anno in anno.
Applicando la formula dell'interesse semplice, Tizio dovrà pagare.
10.000(1 + 0.05 30) = 25.000€.

L'interesse composto

Si dice invece che una grandezza cresce esponenzialmente quando ad intervalli di tempo uguali corrispondono incrementi pari ad una frazione costante del totale.
Un'altra persona invece mette in banca 1.000 € al tasso di interesse ad esempio del 7% annuo, alla fine dell'anno il suo conto ammonta a 1.070 €. L'anno successivo, l'interesse del 7% viene calcolato su 1.070 € e produce altre 75 € circa di interesse che si andrebbero ad aggiungere alla somma già posseduta. L'anno ancora successivo l'interesse verrebbe quindi calcolato su una cifra nuovamente più alta.
Ora è facile comprendere che quanto maggiore è la somma depositata sul conto tanto più denaro verrà aggiunto ogni anno come interesse; ma quanto più se ne aggiunge tanto più ve ne sarà nel conto l'anno successivo e quindi ancora più se ne aggiungerà come interesse. La caratteristica delle crescite esponenziali è proprio questa
La caratteristica della capitalizzazione composta (o *compounding*) è che gli interessi maturati alla fine di ogni periodo si aggiungono al capitale. Questi interessi contribuiscono così alla maturazione di nuovi interessi e si realizza la capitalizzazione degli interessi**.**
Se impiego(a capitalizzazione composta) un capitale **C** ad un dato tasso annuale alla fine del primo anno otterrò il montante $\mathbf{M_1}$
Essendo trascorso 1 anno **t = 1**) per cui
$\mathbf{M_1 = C(1+i)}$

lascio i soldi in banca; M_1diventa il nuovo capitale ed alla fine del secondo anno

otterrò il montante M_2

primo anno	$M_1 = C(1+i)$
secondo anno	$M_2 = C(1+i)^2$
terzo anno	$M_3 = C(1+i)^3$
quarto anno	$M_4 = C(1+i)^4$
....	....

$M_2 = M_1(1+i) = C(1+i)(1+i) = C(1+i)^2$

lascio i soldi in banca; M_2 diventa il nuovo capitale

ed alla fine del terzo anno otterrò il montante **M_3**

$M_3 = M_2(1+i) = C(1+i)^2(1+i) = C(1+i)^3$

Dopo t anni il montante diventa

$$\overset{y}{M_t} = \overset{k}{C}(\overset{b}{1+i})^{\overset{x}{t}} \quad \Rightarrow \quad [y = k\, b^x]$$

Riprendiamo l'esempio di prima.

Supponiamo che si presti a Caio sempre 10.000€ per 30 anni ad un tasso d'interesse annuo del 5%.

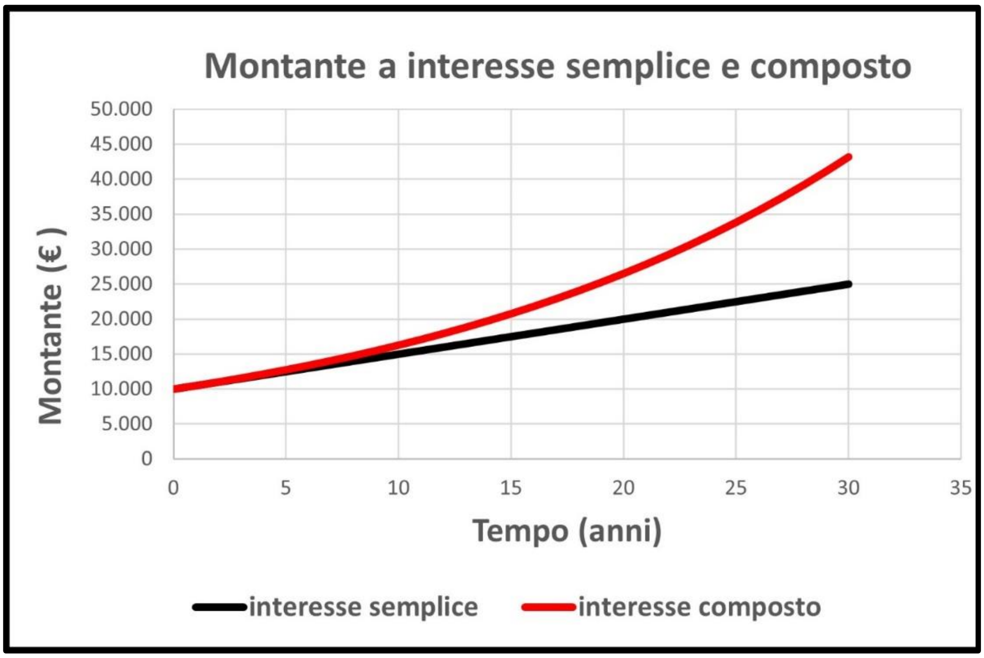
Questa volta, però, aggiungiamo gli interessi maturati al capitale iniziale affinché maturino ulteriori interessi.

Il montante che ottenuto al termine del prestito è pari a

$M = 10.000\,(1 + 0{,}05)^{30} = 43.219$€

Montante: tabella e grafico

	Montante (€)	
anni	Interesse semplice	Interesse composto
0	10.000	10.000,00
5	12.500	12.762,82
10	15.000	16.288,95
15	17.500	20.789,28
20	20.000	26.532,98
25	22.500	33.863,55
30	25.000	43.219,42



Risoluzione di un problema particolare

In quanto tempo un capitale **C***, impiegato ad un interesse composto ad un certo tasso, si raddoppia?*

Il problema si risolve imponendo:

$\mathbf{C(1+i)^t = 2C \;/\; :C}$

$\mathbf{(1+i)^t = 2}$ utilizzo il calcolo logaritmico per cui

$\mathbf{\log (1+i)^t = \log 2}$

$\mathbf{t \log (1+i) = \log 2}$

$\mathbf{t= \log 2/ \log (1+i)}$

Se ad esempio **r = 8%, i = 0,08** la formula diventa

$\mathbf{t= \log 2/ \log 1{,}08}$

t= 9,006….

La formula fornisce la soluzione esatta del problema.

Ad un interesse annuo dell' 8% il capitale si raddoppia in poco più di 9 anni.

Il problema poteva essere risolto anche con un procedimento approssimato e per tale scopo esistono diverse formule.

La più antica di esse è stata proposta da Luca Pacioli: $t = \frac{72}{100\,i}$

Perché la scelta di tale numero? Dai calcoli la formula risulta esatta per un interesse vicino all' 8%.

Roberto Vacca (ingegnere, matematico, divulgatore scientifico, scrittore e accademico italiano) deduce, proprio da valore 72 proposto da Pacioli, che nell'Italia centrosettentrionale alla fine del 1400 gli interessi correnti dovevano aggirarsi attorno al''8%.

Allo stesso tempo propone una formula di Pacioli corretta $t = \frac{69{,}3+0{,}34(100i)}{100\,i}$

Questa relazione fornisce il tempo di raddoppio con un errore a meno dell'1‰.

Luca Pacioli

Ritratto di Luca Pacioli con un allievo conservato nella Pinacoteca del museo nazionale di Capodimonte, al pittore Jacopo de' Barbari

Fra Luca Bartolomeo de Pacioli, o anche *Paciolo* (Borgo Sansepolcro, 1445 circa – Borgo Sansepolcro, 19 giugno 1517), è stato un religioso, matematico ed economista italiano, Egli è riconosciuto come il fondatore della ragioneria.

Nel 1494 pubblicò a Venezia una vera e propria enciclopedia matematica, dal titolo ***Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*** (stampata e pubblicata con Paganino Paganini e dedicata a Guidobaldo di Montefeltro), scritta in volgare, come egli stesso dichiara (in realtà utilizza un miscuglio di termini latini, italiani e greci), contenente un trattato generale di aritmetica e di algebra, elementi di aritmetica utilizzata dai mercanti (con riferimento alle monete, pesi e misure utilizzate nei diversi stati italiani).

Uno dei capitoli della *Summa* è intitolato *Tractatus de computis et scripturis*; in esso viene presentato in modo più strutturato il concetto di ***partita doppia***, già noto e divulgato nell'ambiente mercantile (e quindi: ***Dare e Avere, bilancio, inventario***) che poi si diffuse per tutta Europa col nome di metodo ***veneziano***, perché usato dai mercanti di Venezia.

Pur avendo attinto abbondantemente agli scritti di Fibonacci, ha il merito di aver diffuso l'interesse per la matematica.

Alcune considerazioni sul termine *esponenziale*

Andrebbe tenuto presente quando si usa l'aggettivo "esponenziale" che certi fenomeni possono essere caratterizzati da una crescita esponenziale, ma solo per un determinato, limitato, periodo di tempo. Per esempio, in biologia, il numero di microrganismi in un brodo di coltura crescerà esponenzialmente fino a quando non sarà esaurito il nutriente essenziale. Il primo organismo si divide in due organismi figli, che poi si dividono per formarne quattro, che a loro volta si dividono per formarne otto, e così via. In fisica, nella reazione nucleare a catena (il fenomeno dietro le armi nucleari), ogni nucleo di uranio che subisce la scissione produce neutroni multipli, ciascuno dei quali può essere assorbito dagli adiacenti nuclei di uranio, facendo sì che essi si scindano a loro volta. Se la probabilità di assorbimento dei neutroni supera la probabilità di fuga dei neutroni stessi, il tasso di produzione dei neutroni e di scissioni di uranio indotte aumenta esponenzialmente, in una reazione incontrollata. In economia, come abbiamo visto sopra, l'interesse composto a un tasso d'interesse costante fornisce la crescita esponenziale del capitale. Come ultimo esempio, nell'informatica la teoria della complessità computazionale prevede che gli algoritmi di complessità esponenziale dei computer richiedono un ammontare di risorse esponenzialmente crescente (ad es. tempo, memoria del computer) a fronte di un aumento costante della dimensione dei problemi.

Un modo per illustrare l'estrema rapidità con la quale una crescita esponenziale porta ad approssimarsi ad un valore prefissato è quella di fare ricorso ad un indovinello per bambini. Immaginiamo di avere uno stagno con una pianta di ninfea, le cui foglie galleggiano sulla superficie. La ninfea raddoppia di dimensione ogni giorno e se lasciata incontrollata soffocherà lo stagno in 30 giorni, uccidendo tutte le altre cose viventi nell'acqua. Giorno dopo giorno la pianta sembra piccola e così si decide di lasciarla crescere fino a quando non ricoprirà metà dello stagno, prima di tagliarla. Volendo salvare lo stagno dall'invasione delle foglie di ninfea, in quale giorno si dovrebbe intervenire? La risposta è al 29° giorno, cioè nell'arco di un'unica giornata la situazione passerebbe da rimediabile a irreparabile. Il risultato è sorprendente soprattutto se si riflette sul fatto che il 25° giorno lo stagno risulta essere coperto per poco più del 3% della sua superficie. Anche se spesso le nostre interazioni quotidiane con i numeri sono frettolose e superficiali, questi ricoprono un ruolo importante nella nostra vita. Riuscire a valutare gli ordini di grandezza dei fenomeni ci aiuta a guardare più oggettivamente le nostre esperienze nonché la realtà di cui facciamo parte. Saper cogliere la differenza fra il titolo sensazionalistico di un quotidiano e ciò che veramente è rappresentato dai numeri che vengono illustrati è un primo piccolo passo per non crearsi idee sbagliate ed essere più consapevoli del mondo in cui viviamo.

E per concludere:

Verità matematiche: "crescita esponenziale" non è sinonimo di "crescita veloce di Cecilia Natalini

L'informazione ha una grande importanza nella nostra vita. Fornisce i parametri mediante i quali leggiamo il mondo che ci circonda, contribuisce a formare la nostra opinione e ci orienta ad agire in un modo piuttosto che in un altro. Può capitare, tuttavia, di incappare in articoli nei quali espressioni tecniche, specie di carattere scientifico, sono usate impropriamente. Quante volte ci è successo di sentire o di leggere l'espressione *"crescita esponenziale"*? Provate a fare un giro in rete...

«Eolico in crescita esponenziale, in 40 anni crescerà di nove volte».

Corriere della Sera, marzo 20, 2014

«Mendicanti in crescita esponenziale». *Il Giornale*, ottobre 14, 2011

«Negli ultimi dieci anni riscaldamento globale in crescita esponenziale».

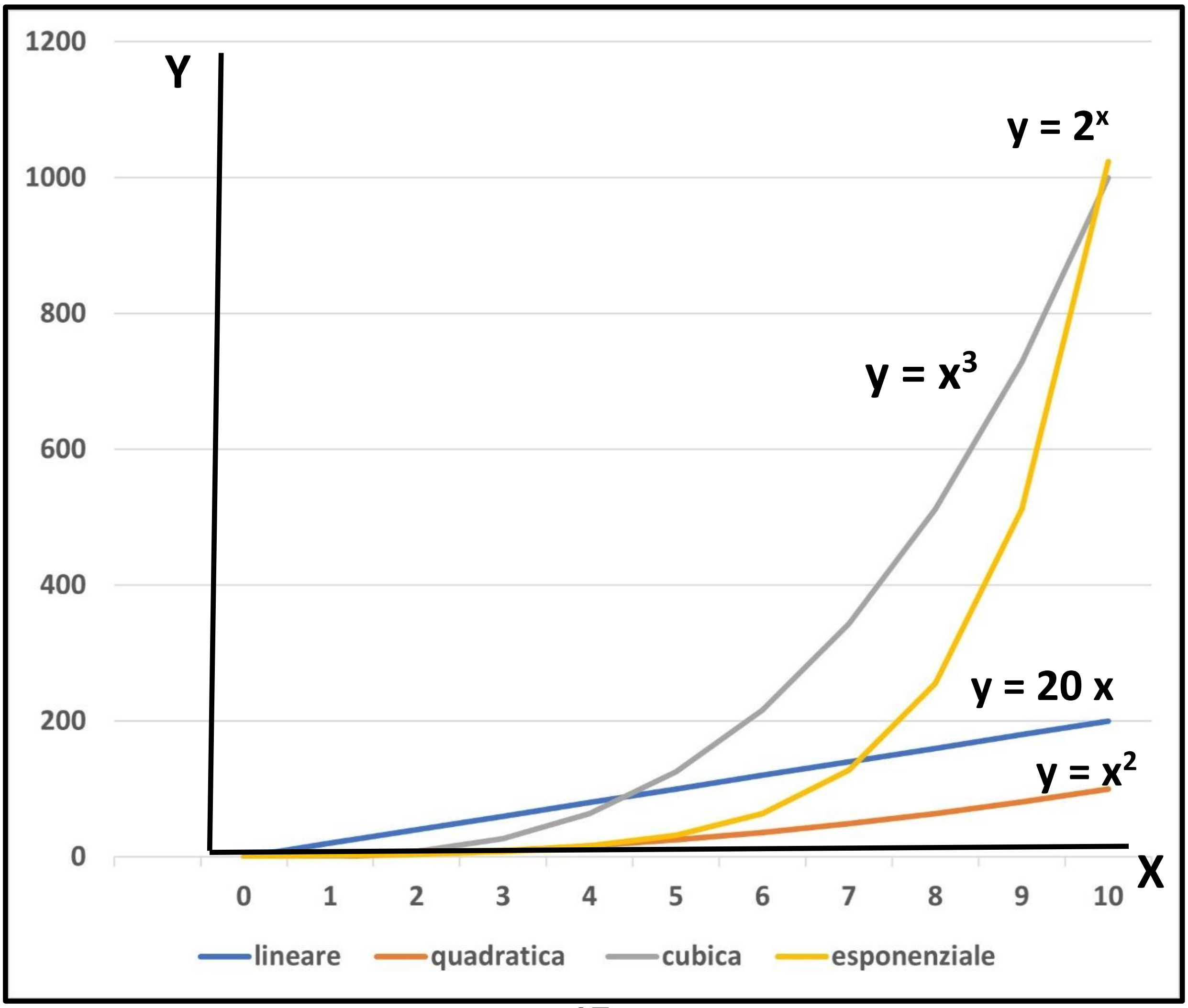
Wired, febbraio 11, 2016

«Crowdfunding: un fenomeno in crescita esponenziale».

Il Fatto Quotidiano, ottobre 6, 2016

Come testimoniano queste citazioni, l'espressione *crescita esponenziale* viene usata spesso senza cognizione di causa. Nell'immaginario comune, infatti, l'espressione crescita esponenziale è spesso associata al concetto di crescita veloce. Mi dispiace dover fare la parte della guastafeste, ma tale convinzione è errata. Scrivere per esempio: «Boom di presenze. Che la location sia uno straordinario punto di forza lo provano i numeri, *cresciuti in maniera esponenziale* da quando il festival è tornato dentro la città» vorrebbe dire che ad oggi, al festival oggetto dell'articolo, si registrerebbero qualche miliardo di presenze, una affermazione chiaramente inverosimile. Cerchiamo di capire perché l'uso di questa espressione per indicare una crescita veloce è sbagliato da un punto di vista matematico.

Forse non tutti sanno che esistono differenti funzioni di crescita. Fra le tante, citiamo come esempio la crescita linare, la quadratica, la cubica e la esponenziale:



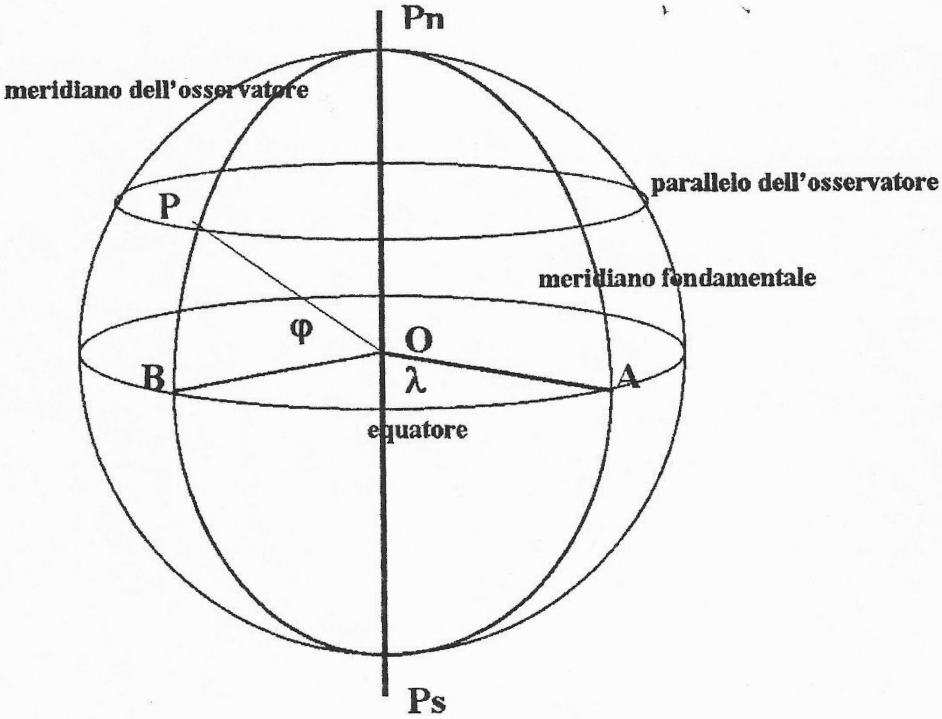
Come si può leggere dal grafico, non in tutti i punti la crescita esponenziale è la funzione di crescita più veloce. Inizialmente, per esempio, sia la crescita lineare che quella cubica possono risultare più veloci della crescita esponenziale.
I fenomeni sottoposti ad una legge di crescita esponenziale non sono infatti caratterizzati da una crescita veloce. Al contrario, in una prima fase si osserva una crescita piuttosto lenta, che poi subisce un'accelerazione improvvisa (la potremmo definire "esplosiva") la quale è spesso causa di cambiamenti repentini, oltre le aspettative.
Vi racconterò una storiella, simpatica, narrata in tutte le facoltà di matematica e statistica per rendere visivo il concetto di crescita esponenziale. Narra la leggenda che all'inventore degli scacchi, che presentava in dono al re di Persia il suo nuovo gioco, venne chiesto cosa voleva in cambio del suo regalo. Egli chiese soltanto del riso e disse che la quantità si doveva calcolare mettendo 1 chicco di riso nella prima casella della scacchiera, 2 chicchi nella seconda, 4 nella terza, 8 nella quarta, e così via, in modo da mettere in ogni casella il doppio dei chicchi messi nella casella precedente. Il simpaticone chiese poi che gli fosse consegnato il contenuto della 64-esima casella. Il re acconsentì prontamente e chiese che fosse portato il riso, rimanendo allibito quando i suoi esperti lo informarono che la quantità di riso richiesta superava di gran lunga le risorse del suo impero! Facciamo un piccolo calcolo. Stimando in 1/45 di grammo il peso medio di un chicco di riso, il peso di 2^{63} chicchi (quelli che dovrebbero trovarsi nella 64-esima casella) è di oltre 200 miliardi di tonnellate. Considerando che la produzione mondiale di riso nel 2014 è stata di 741 milioni di tonnellate, capiamo che evidentemente il re non poté soddisfare tale richiesta. Questa è la vera caratteristica di un fenomeno sottoposto a crescita esponenziale: più è grande la quantità di cui si dispone, più essa si accresce. Se la quantità è piccola aumenta poco, se è media aumenta moderatamente, se è grande aumenta molto.

Coordinate cartesiane sferiche

In analogia con quanto già visto sul piano, è possibile introdurre un sistema di coordinate cartesiane sulla sfera. Agli assi cartesiani del piano corrispondono circonferenze massime, le coodinate sono rappresentate da misure di angoli.

Coordinate geografiche

Per individuare la posizione di un osservatore sulla terra si usano la latitudine e la longitudine.



La **latitudine φ** di un osservatore P è **l'angolo B Ô P** cioè l'angolo compreso tra l'equatore e la direzione che va a P. Si misura in gradi, primi, secondi da 0° a 90°, positiva verso il Pn e negativa verso il Ps

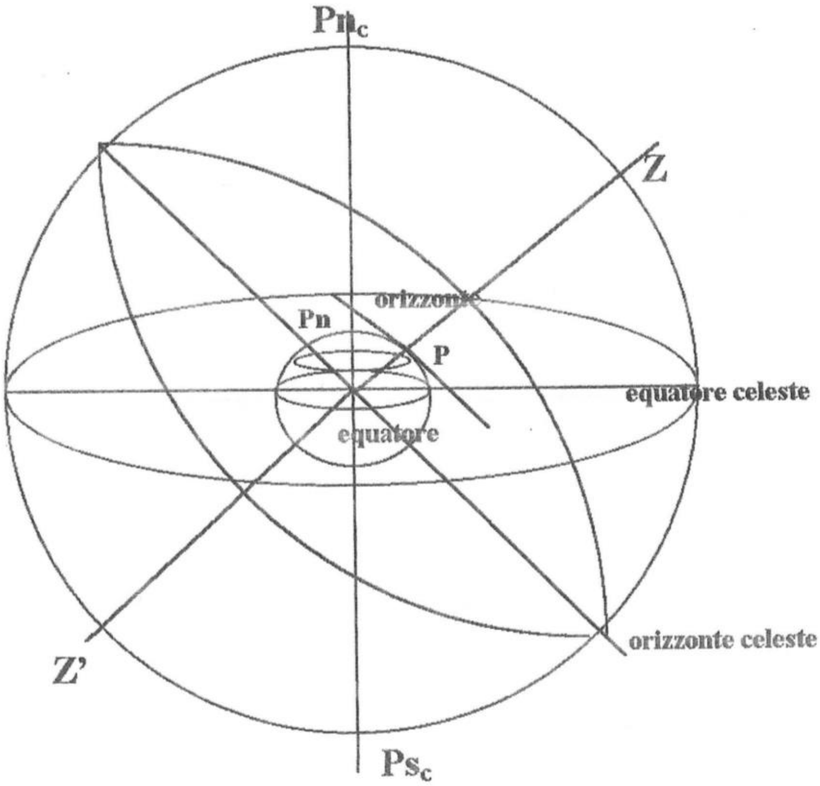
La **longitudine λ** di un osservatore P è **l'angolo A Ô B** cioè l'angolo compreso tra il piano del meridiano fondamentale ed il piano del meridiano dell'osservatore. Si misura in gradi, primi, secondi da 0° a 180°, positiva verso E e negativa verso W

L'equatore è il cerchio massimo perpendicolare all'asse terrestre, i paralleli sono dei circoli minori paralleli all'equatore. I meridiani sono dei cerchi massimi passanti per i poli.
La scelta del meridiano fondamentale è del tutto convenzionale. Di solito viene scelto come meridiano fondamentale quello di Greenwich.
Altra considerazione da fare è la seguente: per passare agevolmente da una misura di angoli ad una misura di lunghezza si è definito **miglio marino l'arco di equatore o di meridiano[4] sotteso da un angolo di 1 primo.** Esso vale circa 1852 metri. Basta trasformare il valore angolare in primi. Ad un certo numero di primi corrisponde lo stesso numero di miglia e quindi chilometri.
Da un punto di vista matematico, permane la corrispondenza biunivoca tra punti della superficie terrestre e coppie ordinate di numeri reali.

[4] Ci sarebbe la necessità di precisare meglio la definizione in quanto, non essendo la terra sferica, l'ampiezza dell'arco non è costante relativamente ai due circoli massimi.

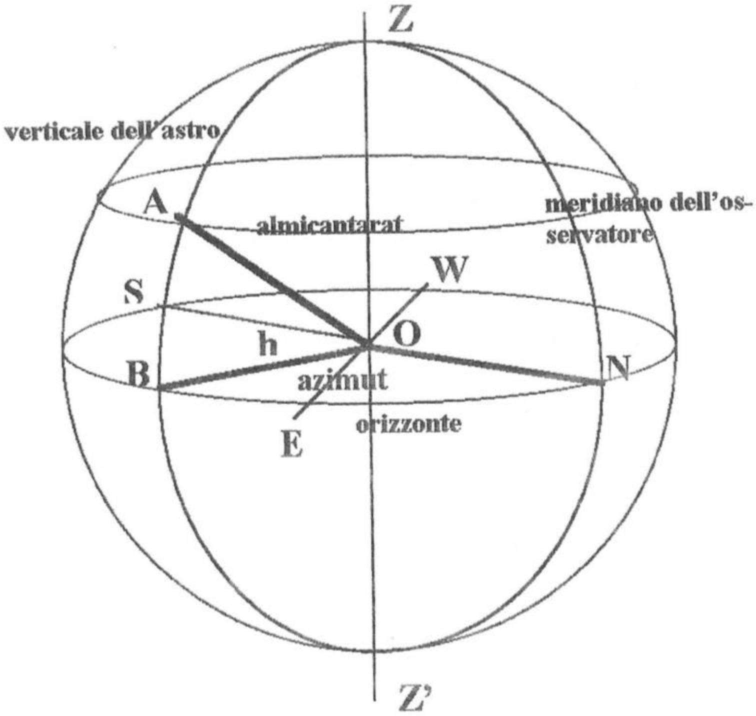
Sfera celeste

E' conveniente usare una varietà di sistemi di coordinate, a seconda della classe di oggetti che si osservano. Si opera sulla **sfera celeste** che è una superficie sferica immaginaria a grande distanza dalla Terra, con la Terra al suo centro.



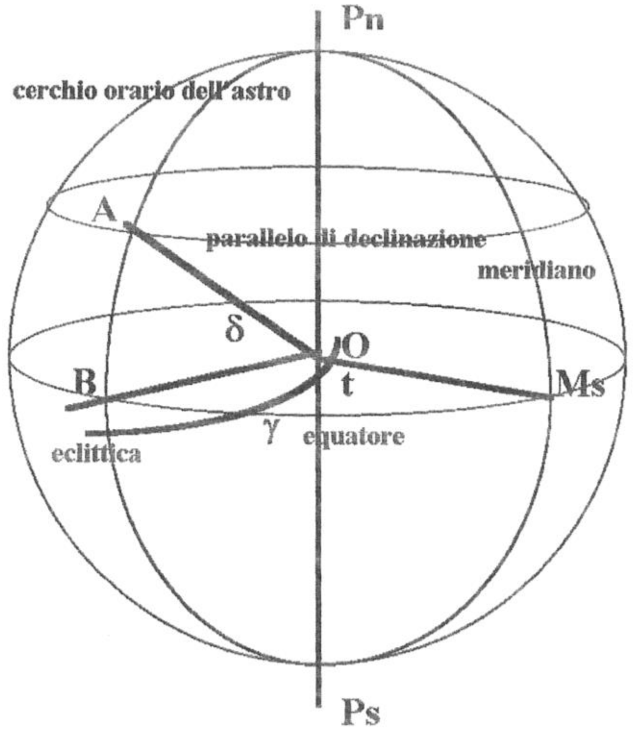
La **Zenit(Z)** è la proiezione della posizione dell'osservatore sulla sfera celeste. Il punto diametralmente opposto è il **Nadir(Z')**.
Il
L'orizzonte sulla terra risulta tangente alla superficie. L'orizzonte celeste passa per il centro della sfera celeste.
L'equatore celeste è la proiezione di quello terrestre sulla sfera celeste.
I cerchi minori paralleli all'equatore si dicono **paralleli di declinazione**, quelli paralleli all'orizzonte si dicono **almicantarat**.
I circoli massimi perpendicolari all'equatore si dicono **cerchi orari**, quelli perpendicolari all'orizzonte **verticali**.

Sistema di coordinate orizzontale



In questo sistema le coordinate chiamate **altazimutali** sono:
l'altezza(h) è l'angolo(**BÔA**) compreso tra il piano dell'orizzonte e l'astro. Si misura in gradi, primi e secondi(da 0° a 90°), positiva verso Z e negativa verso Z'
l'azimut è l'angolo(**NÔB**) compreso tra il punto cardinale N ed il piede del verticale dell'astro. Si misura in gradi, primi e secondi(da 0° a 180°), in senso orario(N-E-S-W)
Ci sono ancor altre coordinate derivate da queste.
In questo sistema le coordinate di un oggetto variano continuamente nel corso della rotazione della terra sul suo asse e variano con il variare della posizione dell'osservatore.

Sistema di coordinate equatoriale



Il cerchio massimo che passa per i poli e per lo zenit si chiama **meridiano**, mentre i circoli massimi che passano per i poli si dicono **orari**
Le coordinate **locali orarie:**

δ declinazione) è l'angolo **(BÔA)** compreso tra l'equatore e l'astro. Si misura in gradi, primi e secondi da 0° a 90° positiva versi il Pn, negativa versi il Ps

t tempo è l'angolo **(MsÔB)** compreso tra il piede del meridiano ed il piede dell'orario che passa per l'astro. Si misura in senso orario da 0° a 360°
Anche queste coordinate come le altazimutali dipendono dalla posizione dell'osservatore.
In questo caso se varia la posizione dell'osservatore, varia il meridiano e quindi varia il tempo.

Per ovviare a questo fatto(non far dipendere la posizione dell'astro da quella dell'osservatore) si considera un altro sistema di coordinate in cui l'origine è il punto gamma γ,punto equinoziale di primavera, punto in cui l'eclittica, (orbita apparente del sole attorno alla terra incontra l'equatore).
Le coordinate risultano:

declinazione δ già precedentemente definita

ascensione retta α è l'angolo compreso tra il punto gamma e l'orario che passa per l'astro.
In questo caso le coordinate dell'astro non dipendono dalla posizione dell'osservatore.
Esistono altre coordinate che derivano dalle precedenti e che si misurano in tempo e che hanno l'origine in altri punti della sfera celeste.