Equazioni

Definizioni preliminari

Principi di equivalenza

equazioni di 1° grado

equazioni di 2° grado

a cura di Bruno Pizzamei

Equazioni

Un'***equazione*** (dal latino *aequatio*) è una uguaglianza matematica tra due espressioni contenenti una o più variabili, dette ***incognite***. L'uso del termine risale almeno al *Liber abaci* del Fibonacci (1228).

Se un'equazione ha **n** incognite, allora ogni **n upla** di elementi che sostituiti alle corrispondenti incognite rendono vera l'uguaglianza è una **soluzione** dell'equazione. Risolvere un'equazione significa individuare l'insieme di tutte le sue soluzioni.

Dominio

Il ***dominio*** (o i*nsieme di definizione*) delle variabili incognite è l'insieme degli elementi per cui le espressioni ad ambo i membri dell'equazione sono definite, ovvero quell'insieme di numeri per cui l'equazione esiste.

L'insieme delle soluzioni è condizionato dal dominio: per esempio l'equazione

$x^2 - 2 = 0$

non ammette soluzioni se il dominio è l'insieme dei numeri razionali, mentre ammette due soluzioni nei numeri reali, che possono essere scritte come $\pm\sqrt{2}$. .

Analogamente, l'equazione $x^2 + 1 = 0$

non possiede soluzioni reali ma è risolvibile se il dominio è il campo dei numeri complessi.

Principi di equivalenza

Due equazioni si dicono ***equivalenti*** se i rispettivi insiemi delle soluzioni coincidono. Vi sono due principi che consentono di manipolare le equazioni per trovare l'insieme delle soluzioni; essi sono una conseguenza diretta delle proprietà delle uguaglianze:

Primo principio di equivalenza: data un'equazione, aggiungendo o sottraendo ad entrambi i membri uno stesso numero o una stessa espressione contenente l'incognita si ottiene un'equazione equivalente, a patto che, nel caso di aggiunta di un'espressione dipendente da un'incognita, non vengano ristrette le condizioni di esistenza.

Esempio:

4x + 13 =28

4x + 13 +2 =28 +2

4x + 15 =30

Secondo principio di equivalenza: data un'equazione, moltiplicando o dividendo ambo i membri per un numero diverso da zero, o per un'espressione contenente l'incognita che non si annulli qualunque sia il valore dell'incognita stessa, e che non restringa le condizioni di esistenza, si ottiene un'equazione equivalente.

Esempio:

$$3x - 1 = \frac{3x}{2x-1}$$
$$(2x-1)(3x-1) = (2x-1)\frac{3x}{2x-1}$$
$$6x^2 - 5x + 1 = 3x$$
$$6x^2 - 8x + 1 = 0$$

l'equivalenza logica tra le prime due e le rimanenti equazioni non sussiste però per

x =1/2 perché ne annulla il denominatore.

Equazione di primo grado

Un’equazioni di primo grado ad un'incognita è un’**equazioni in cui l'incognita è elevata a esponente 1 e può essere moltiplicata o sommata con termini numerici qualsiasi**.

ax +b = 0

applico il primo principio di equivalenza

ax + ~~b~~ - ~~b~~= 0 – b ax = - b

applico il secondo principio di equivalenza

1/a * ax = 1/a* (- b) **x = -b/a**

Un'equazione si dice:

determinata se ammette un numero finito di radici, in tal caso l'insieme soluzione sarà discreto, formato da un numero finito di elementi.

$2x - 6 = 12$ $\quad x = (12 + 6)/2 \quad x = 9$

Impossibile se non ammette alcuna radice, in tal caso l'insieme soluzione sarà l'insieme vuoto.

$x + 1 = x - 1 \quad 0x = -2$

indeterminata se il numero delle soluzioni è infinito ma non coincide con tutto il dominio, in tal caso l'insieme soluzione sarà infinito e diverso dall'insieme dominio.

$3x - 1 = 3(x + 1) - 4 \quad 3x - 1 = 3x + 3 - 4 \quad 3x - 3x = 1 + 3 - 4 \quad 0x = 0$

Identità se ha come insieme delle soluzioni tutto il dominio, in tal caso l'insieme delle soluzioni sarà uguale al dominio.

$7x + 2x = 9x$

$$ax = b \quad \begin{cases} a = 0,\ b = 0 & \rightarrow \quad \text{indeterminata} \\ a = 0,\ b \neq 0 & \rightarrow \quad \text{impossibile} \\ a \neq 0,\ \forall b & \rightarrow \quad \text{determinata}:\ x = \frac{b}{a} \end{cases}$$

Equazione di secondo grado

Un' equazione di secondo grado è un'equazione del tipo: $ax^2 + bx + c = 0$ con a, b , c $\in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. I valori a, b, c prendono il nome di coefficienti e, in particolare, c viene detto termine noto.

$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ utilizzo i principi di equivalenza

$ax^2 + bx = -c$ / moltiplico per **4a** entrambi i membri

$4a^2x^2 + 4bx = -4ac$ aggiungo $\mathbf{b^2}$ ad entrambi i membri

$4a^2x^2 + 4bx + b^2 = -4ac + b^2$

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \qquad b^2 - 4ac = \Delta$

2ax + b =$\pm\sqrt{b^2-4ac}$

$$x_{12} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Δ prende il nome di discriminante dell'equazione. La parola discriminante deriva dal verbo discrimen (=divisione); in effetti, il Δ permette di effettuare una distinzione tra la tipologia delle soluzioni di un'equazione di secondo grado. Si possono infatti presentare tre casi:

Equazione $ax^2+bx+c=0$ completa con $a\neq 0$	
Discriminante	Soluzioni
$\Delta>0$	Due soluzioni reali e distinte $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta=0$	Due soluzioni reali e coincidenti $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$
$\Delta<0$	Nessuna soluzione reale $I.S.=\emptyset$

Per quanto riguarda le soluzioni di equazioni incomplete:

Equazioni incomplete			
Coefficienti	Nome	Equazione	Soluzioni
$b=0,\ c=0$	Monomia	$ax^2=0$	$x_1=x_2=0$
$b=0,\ c\neq 0$	Pura	$ax^2+c=0$	se a e c sono concordi $I.S.=\emptyset$ se a e c sono discordi $+\sqrt{-\frac{c}{a}} \vee x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$
$b\neq 0,\ c=0$	Spuria	$ax^2+bx=0$	$x_1=0 \vee x_2=-\frac{b}{a}$