Relazioni e funzioni

Insieme universo

Unione, intersezione di insiemi

Prodotto cartesiano

Relazioni

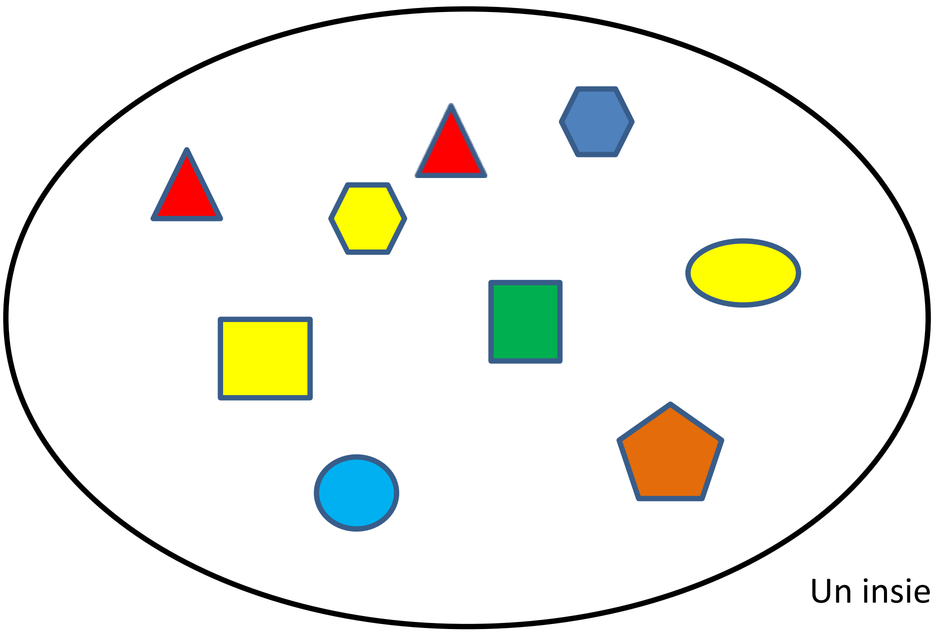
Funzioni

A cura di Bruno Pizzamei

Relazioni e funzioni

Insieme

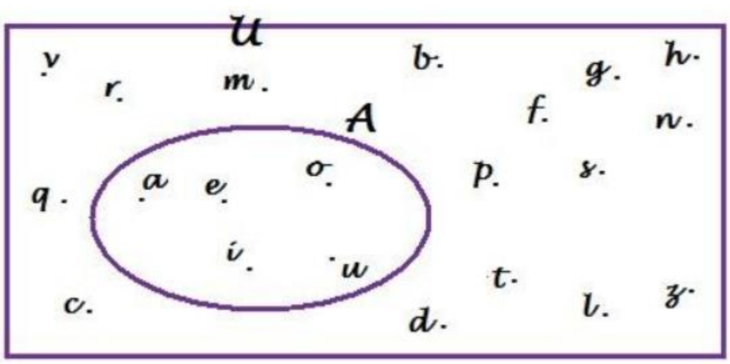
In matematica, una collezione di elementi rappresenta un insieme se esiste un criterio oggettivo che permette di decidere univocamente se un qualunque elemento fa parte o no del raggruppamento. Si tratta di un concetto fondamentale della matematica moderna, a partire dal quale si è sviluppata la teoria degli insiemi. Nell'uso informale gli oggetti della collezione possono essere qualunque cosa: numeri, lettere, persone, figure, ecc., anche non necessariamente omogenei; nelle formalizzazioni matematiche gli oggetti della collezione vanno invece ben definiti e determinati.



Un insieme di figure geometriche

Insieme universo

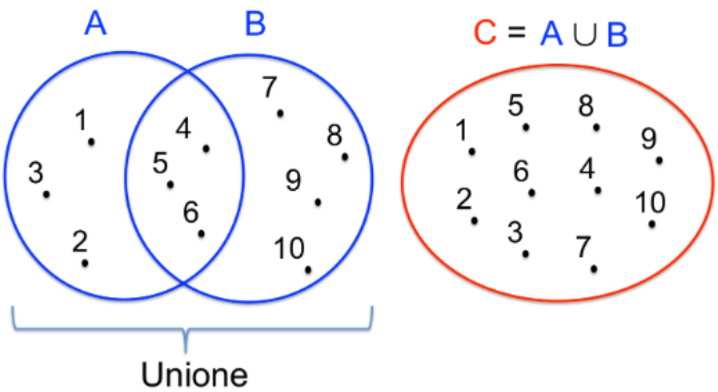
L'**insieme ambiente o universo** è un insieme che contiene la totalità degli elementi da cui bisogna prendere quelli occorrenti per formare un insieme. In generale, dato un insieme A, l'insieme ambiente è un insieme che contiene A. Per esempio, se A è l'insieme dei numeri naturali multipli di 3, l'insieme universo è l'insieme di tutti i numeri naturali; se A è l'insieme delle vocali dell'alfabeto italiano, l'insieme universo è l'insieme di tutte le lettere dell'alfabeto italiano.



L'**unione tra due o più insiemi** è un insieme che contiene tutti gli elementi degli insiemi considerati. Se gli insiemi contengono elementi comuni, questi vengono presi una sola volta.

Il simbolo dell'operazione di unione è

ESEMPIO: Considero l'unione tra l'insieme A = {1,2,3,4,5,6} e l'insieme B = {4,5,6,7,8,9,10}.

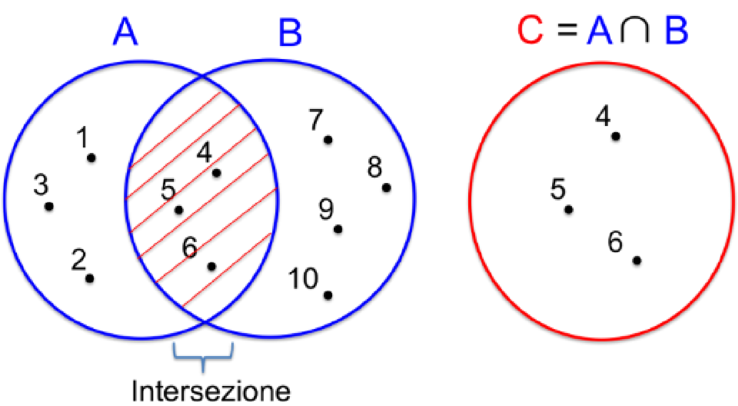


Intersezione tra insiemi

L'**intersezione tra due o più insiemi** è un insieme che contiene tutti gli elementi comuni agli insiemi considerati. Se gli insiemi non contengono elementi comuni, allora l'intersezione sarà l'insieme vuoto.

Il simbolo dell'operazione di intersezione è

ESEMPIO: Considero l'intersezione tra l'insieme A = {1,2,3,4,5,6}e l'insieme B = {4,5,6,7,8,9,10}.



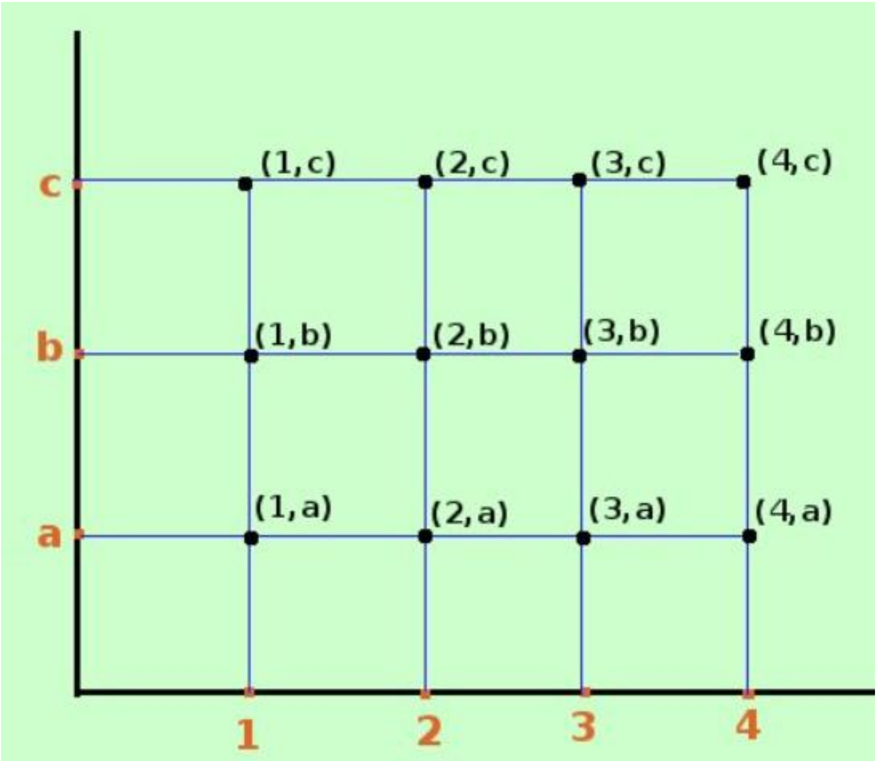
L'intersezione tra questi due insiemi sarà l'insieme C = A ∩ B = {4,5,6}.

Prodotto cartesiano

Dati due insiemi A e B, il prodotto cartesiano A x B è l'insieme di tutte le coppie ordinate (a,b) dove il primo elemento "***a***" appartiene all'insieme A e il secondo elemento "***b***" appartiene all'insieme B.

Dati gli insiemi A= {1, 2, 3 ,4} e B = {a, b, c} il prodotto cartesiano A x B è l'insieme formato da tutte le coppie (a, b) dove a∈A e b∈B

A x B = { (1,a) (1,b) (1,c) 2,a) (2,b) (2,c) (3,a) (3,b) (3,c) (4,a) (4,b) (4,c)}



Relazione tra due insiemi

Le relazioni

Possiamo definire la relazione fra due insiemi A e B in due modi diversi, uno riferito agli insiemi e l'altro agli elementi dei due insiemi:

Definiamo ***relazione R*** fra due insiemi **A** e **B** un qualunque sottoinsieme del prodotto cartesiano **A x B**

Dati due insiemi **A** e **B** diciamo che esiste una ***relazione R*** fra **A** e **B** se esiste una proprietà che associ a qualche elemento di **A** un elemento di **B**.

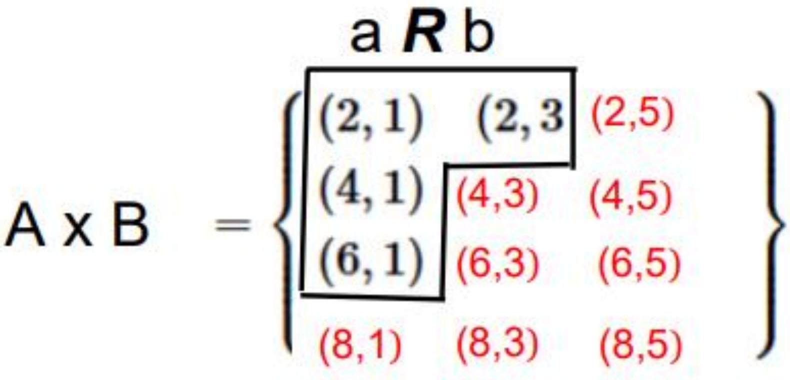
Se a∈A e b∈B. allora per ogni **a** e per ogni **b** dobbiamo poter dire se è valida o meno la proprietà **a** *R* **b** sulla coppia **(a,b).**

La relazione sarà l'insieme di tutte le coppie **(a,b)** per cui *R* è valida

In matematica, il concetto di relazione è analogo a quello del linguaggio comune. Esiste una relazione **quando elementi di un insieme sono legati in qualche modo con elementi di un altro insieme**. Gli elementi dei due insiemi possono essere di qualunque tipo ed il legame fra loro può essere di qualsiasi natura.

Dati gli insiemi A= {2, 4, 6 ,8} e B = {1, 3, 5} stabilisco la relazione R che individua le coppie di elementi (a, b) tali che a + 2b < 10. La coppia (2, 1) soddisfa la relazione 2 + 2 1 = 4 < 10

La coppia (2, 5) non soddisfa la relazione perché 2 + 2 5 = 12 >10



Le funzioni

Definizione: Dati due insiemi *A* e *B*, si definisce ***funzione*** una relazione che associa a ogni elemento di *A* uno e un solo elemento di *B*.

Osservazione: Dalla definizione si evince che a ogni elemento di *A* deve essere associato un solo elemento di *B*, ovvero non possono esistere elementi di *A* che non sono messi in relazione con un elemento di *B*.

Notazione: Per indicare una generica funzione dall'insieme *A* all'insieme *B*, si utilizza la scrittura

$f: A \to B$ che viene letta "*effe è una funzione che va da A verso B*".

Inoltre per indicare che l'elemento $b \in B$

è il corrispondente dell'elemento $a \in A$, si utlizzala scrittura: $b = f(a)$.

Terminologia:

1. L'elemento $b = f\ (a)$ prende il nome di ***immagine*** dell'elemento *b* tramite la funzione *f*.
2. L'elemento *a* si chiama ***controimmagine*** di *b*.
3. L'insieme *A* prende il nome di ***dominio***, o ***insieme di definizione***, o ***insieme di esistenza*** della funzione, mentre l'insieme *B* prende il nome di ***insieme di arrivo*** della *f*.
4. L'insieme delle immagini, indicato con f(A) prende il nome di ***codominio*** della funzione.

Osservazioni: Non tutti gli elementi di *B* devono necessariamente essere l'immagine di un elemento di *A*, ci possono essere elementi di *B* che non fanno parte di $f(A)$ e per tale ragione il codominio della funzione è un sottoinsieme dell'insieme di arrivo,

cioè $f\ (A) \subseteq B$

Definizione: Una funzione $f: A \to B$ si dice ***costante*** quando tutti gli elementi del dominio hanno la stessa immagine.

Funzioni numeriche

Definizione: La funzione $f: A \to B$ si dice ***numerica*** se gli insiemi *A* e *B* sono insiemi numerici.

Alla luce di questa definizione, se consideriamo come insieme numerico quello dei numeri reali $\mathbb{R}$, possiamo parlare di funzioni reali di variabile reale e quindi dare la seguente definizione:

Definizione: Una ***funzione reale di variabile reale*** è una relazione che lega due grandezze variabili in modo tale che, assegnati dei valori arbitrari a una di esse (detta ***variabile indipendente***), restano univocamente determinati i valori dell'altra variabile (detta ***variabile dipendente***).

Notazioni: La variabile indipendente viene solitamente indicata con la lettera *x,* mentre la variabile dipendente viene indicata con la lettera *y*. Per evidenziare il fatto che la *y* dipende dalla *x*, si utilizza la scrittura:

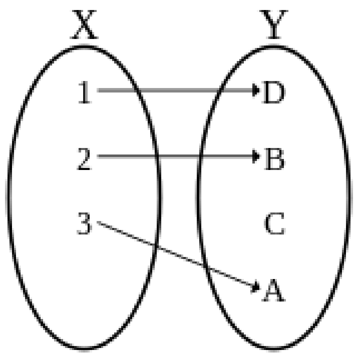
y = f(x) e si legge y è funzione di x.

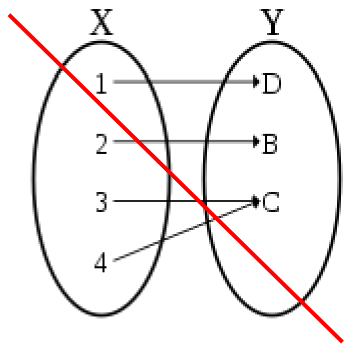
Una **funzione iniettiva** è una funzione che associa, a elementi distinti del dominio, elementi distinti del codominio. Due elementi distinti del dominio hanno quindi immagini distinte.

Un esempio di funzione iniettiva:

non esiste alcun elemento di Y

che sia puntato da più di un elemento di X



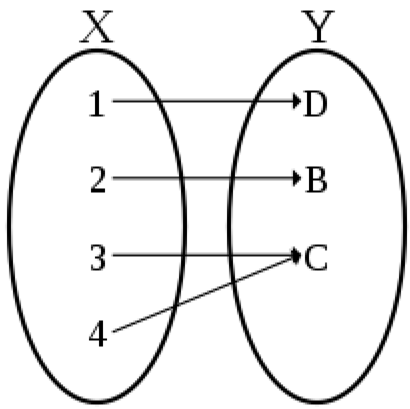


Una funzione si dice **suriettiva** quando ogni elemento del codominio è immagine di almeno un elemento del dominio.

Un esempio di funzione suriettiva:

non esiste alcun elemento di Y che non sia puntato

da un elemento di X



Una **corrispondenza biunivoca** o **funzione biettiva** tra due insiemi **X** e **Y** è una relazione binaria tra **X**e **Y** , tale che ad ogni elemento di **X** corrisponda ***uno ed un solo*** elemento di **Y**e viceversa ad ogni elemento di **Y** corrisponda uno ed un solo elemento di **.X**.

Una funzione si definisce biunivoca

se è sia iniettiva che suriettiva.