Matematica
Col termine matematica di solito si designa la disciplina (e il relativo corpo di conoscenze che studia problemi concernenti quantità, estensioni e figure spaziali, movimenti di corpi, e tutte le strutture che permettono di trattare questi aspetti in modo generale.
La potenza e la generalità dei risultati della matematica le ha reso l'appellativo di *regina delle scienze*: ogni disciplina scientifica o tecnica, dalla fisica all'ingegneria, dall'economia all'informatica, fa largo uso degli strumenti di analisi, di calcolo e di modellazione offerti dalla matematica.

Aritmetica
L'**aritmetica** è la più antica branca della matematica, quella che studia le proprietà elementari delle *operazioni aritmetiche* sui numeri, specialmente i numeri interi.
È praticata quotidianamente da tutti per scopi molto semplici, come contare oggetti, valutare costi, stabilire distanze; viene utilizzata anche per scopi avanzati, ad esempio in complessi calcoli finanziari o nella tecnologia delle comunicazioni (crittografia).
I matematici talvolta usano il termine aritmetica per indicare la teoria dei numeri; questa disciplina però tratta problemi più avanzati e specifici rispetto all'aritmetica elementare e non viene presa in considerazione nel presente articolo.
La preistoria dell'aritmetica si limita ad un piccolo numero di piccoli artefatti che testimoniano una chiara concezione dell'addizione e della sottrazione; la prima fonte è l'osso d'Ishango rinvenuto nell'Africa centrale, datata circa tra il 20,000 e il 18,000 a.C.
È chiaro che i babilonesi avevano una solida conoscenza di quasi tutti gli aspetti dell'aritmetica elementare già intorno al 1800 a.C., anche se gli storici possono solo avanzare congetture sopra i metodi utilizzati per ottenere i risultati delle operazioni aritmetiche; questo è il caso dei risultati presentati nella tavoletta d'argilla Plimpton 322, che si presenta come una lista di terne pitagoriche; non si ha invece la possibilità di mostrare in qual modo questa lista sia stata originariamente prodotta. Similmente gli egizi, attraverso il Papiro di Rhind (che risale al 1650 a.C. circa, ma che, con ogni evidenza, è una copia di un vecchio testo del 1850 a.C. circa) testimoniano che le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione venivano effettuate all'interno di un sistema basato su frazioni unitarie.
Nicomaco di Gerasa, nella sua opera *Introduzione all'aritmetica*, ha presentato concisamente l'approccio filosofico pitagorico ai numeri, e alle loro mutue relazioni. In quei tempi le operazioni aritmetiche di base costituivano attività molto complesse ed impegnative; è stato il metodo noto come il «Metodo degli indiani» (in latino *Modus Indorum*), che ha condotto all'aritmetica che conosciamo oggi. L'aritmetica indiana è stata molto più semplice di quella greca, a causa della semplicità del sistema di numerazione indiano, che per primo è riuscito a servirsi del numero zero e di una notazione posizionale. Nel VII secolo il vescovo siriaco Severo Sebokht menzionava questo metodo con ammirazione, precisando tuttavia che il metodo degli indiani si presentava senza alcuna descrizione.
Gli arabi appresero questo nuovo metodo e lo chiamarono *hesab*. Leonardo Fibonacci (noto anche come Leonardo di Pisa), ha introdotto in Europa il metodo degli indiani nel 1202. Nel suo *Liber Abaci*, Fibonacci afferma che, rispetto a questo nuovo metodo, tutti gli altri metodi sono stati sbagliati. Nel Medioevo, l'aritmetica era una delle sette Arti Liberali e veniva insegnata nelle università. Francesco Pellos ne compendiò lo stato nel XV secolo.
I moderni algoritmi dell'aritmetica (utilizzati sia per calcoli manuali che per calcoli automatici) sono stati resi possibili dalla introduzione dei numerali arabi e della loro notazione numerica posizionale e decimale. L'aritmetica araba basata sui numerali era stata sviluppata dai grandi matematici indiani Aryabhatta, Brahmagupta e Bhāskara I. Aryabhatta ha tentato di usare diverse notazioni posizionali e Brhmagupta ha arricchito dello zero il sistema numerico indiano. Brahmagupta ha

messo a punto i procedimenti moderni per moltiplicazione, divisione, l'addizione e sottrazione basate sulle cifre decimali. Sebbene oggi siano ormai considerati elementari, questi procedimenti per la loro semplicità costituiscono il punto di arrivo di migliaia di anni di sviluppo della matematica. Per contrasto l'antico matematico Archimede ha dedicato un'intera opera, l'*Arenario* , a mettere a punto una notazione per un certo numero intero molto grande. Alla fioritura dell'algebra nel mondo islamico medievale e nell'Europa Rinascimentale ha contribuito in misura significativa anche l'enorme semplificazione dei calcoli numerici consentita dalla notazione decimale.
Le operazioni aritmetiche tradizionali sono addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione, sebbene vengano a volte incluse nella materia anche operazioni più avanzate come l'elevamento a potenza, l'estrazione di radice, i logaritmi e l'uso delle percentuali. I calcoli aritmetici vengono effettuati rispettando l'ordine delle operazioni.

Numero

In matematica, un **numero** è un modo di esprimere una quantità, oppure la posizione in un elenco di elementi, oppure il rapporto tra grandezze dello stesso tipo Il concetto di numero nasce per la necessità del conteggio, come astrazione del concetto di quantità, realizzato attraverso una corrispondenza biunivoca tra elementi di due insiemi distinti.

Sistema di numerazione

Un **sistema di numerazione** è un modo di esprimere e rappresentare i numeri attraverso un insieme di simboli. I numeri, fin dai tempi antichi, sono uno strumento necessario per quantificare un insieme di elementi. Tutte le civiltà conosciute hanno ideato un sistema di numerazione, a partire dalle popolazioni primitive che adottavano il sistema di numerazione additivo fino all'epoca attuale, in cui è diffuso il sistema di numerazione posizionale.
Nel corso della storia sono state adottate svariate notazioni numerali in gran parte poco razionali fino a giungere con una certa fatica alle notazioni oggi più diffuse, pratiche e canoniche, le notazioni posizionali decimali.

Sistema di numerazione additivo

In matematica, un **sistema di numerazione additivo** è un sistema di numerazione basato su una legge additiva applicata a determinati simboli numerici fondamentali. Ogni numero è rappresentato attraverso una successione di tali simboli ed il suo valore è dato dalla somma dei valori attribuiti a ciascuno di essi. Nei sistemi additivi non serve un simbolo per lo zero.
Utilizzato fin dalle popolazioni primitive, il sistema additivo costituisce la base di tutti i sistemi di numerazione utilizzati nell'antichità in una miriade di versioni Solo verso il X secolo incominciò ad essere soppiantato dal sistema di numerazione posizionale introdotto dai matematici indiani ed arabi. Tuttavia, ancora oggi il sistema di numerazione romano ha un utilizzo sia pure limitato, per es. per i numeri ordinali
Tra i più famosi sistemi additivi, oltre a quello romano, figurano quello egizio e quello attico.
Per quanto riguarda il già citato sistema di numerazione romano, si deve notare che era *puramente additivo* solo nella sua forma più antica. I segni utilizzati sono : **I, V, X, L, C, D, M.**
Se il numero è scritto, da sinistra a destra, posizionando i simboli in modo che il loro valore sia decrescente, questi vengono sommati per ottenere il valore del numero rappresentato. Ma, se uno dei simboli *I*, *X* o *C* ne precede uno di valore maggiore, esso viene sottratto. Per esempio il numero romano LX è uguale a 60 mentre il numero XL è uguale a 40.

Sistema di numerazione posizionale

Un **sistema di numerazione posizionale** è un sistema di numerazione che usa simboli (cifre) usati per scrivere i numeri, che assumono valori diversi a seconda della posizione che occupano nella notazione.
Ad esempio nel sistema di numerazione arabo (così chiamato per ragioni storiche, anche se la sua origine in realtà è indiana), quello più comunemente usato oggi al mondo, la prima cifra da destra esprime il numero delle unità, la seconda quello delle decine, la terza quello delle centinaia, la quarta quello delle migliaia, e così via. Per esempio il numero 555 si legge: *5 centinaia, 5 decine, 5 unità* (cinquecentocinquantacinque). La stessa cifra 5 quando si trova nella prima posizione (sempre contando da destra) ha valore cinque, nella seconda posizione ha valore cinquanta, nella terza posizione ha valore cinquecento. In un sistema di numerazione non posizionale invece per esprimere questi tre valori si usano tre simboli diversi: ad esempio in numeri romani cinquecentocinquantacinque si scrive DLV.
I sistemi di numerazione posizionali necessitano della cifra zero per segnare i posti "vuoti". Ad esempio il numero cinquecentocinque (5 centinaia, 0 decine, 5 unità) va scritto 505, con uno zero nella posizione delle decine: se non si mettesse lo zero, scrivendo 55, sarebbe il numero cinquantacinque invece di cinquecentocinque. Nei sistemi non posizionali invece non si usa lo zero perché l'uso di simboli diversi per unità, decine, centinaia eccetera lo rende non necessario: in numeri romani cinquecentocinque si scrive DV e non si può confondere con cinquantacinque che si scrive LV.
L'utilizzo della posizione per codificare delle informazioni permette di usare un numero minore di simboli: infatti il sistema di numerazione indiano è in grado di rappresentare numeri ampi con una notazione compatta utilizzando solamente dieci simboli a differenza del sistema romano che, per rappresentare numeri *elevati*, faceva uso di simboli aggiuntivi che complicavano l'apprendimento della matematica e rendevano complessi i calcoli di ingegneria. L'adozione della notazione posizionale ha permesso infatti di definire ed applicare algoritmi relativamente semplici ed indipendenti dalla dimensione dei numeri per effettuare le operazioni elementari come l'addizione, la moltiplicazione o l'elevamento a potenza, con ciò di fatto consentendo lo sviluppo del calcolo matematico astratto, e quindi della scienza moderna.

Operazione numerica

Si definisce **operazione numerica** una procedura che, a partire da uno o più numeri, genera un altro numero. Le operazioni numeriche fondamentali (dette anche "operazioni aritmetiche") sono: l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione.
Oltre all'operazione diretta esiste l'operazione inversa, che permette di risalire dal risultato ai numeri iniziali.

I NUMERI NATURALI

I **numeri naturali** sono quelli che usiamo per contare e ordinare.
I primi vengono detti **numeri cardinali**, i secondi **numeri ordinali**.
I numeri naturali sono 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,….. ecc. fino all'infinito.
Ogni numero naturale ha un suo **successivo**, che si ottiene aggiungendo 1.
Ogni numero naturale ha un numero che lo precede, chiamato **precedente,** che si ottiene sottraendo 1, tranne lo **0**, che è il **numero naturale più piccolo**.
Esempio: 2 è il successivo di 1, 17 è il successivo di 16, 450 è il successivo di 449
1 è il precedente di 2, 16 è il precedente di 17, 449 è il precedente di 450

Per scrivere **se un numero è maggiore o minore di un altro**, si usano i seguenti simboli:

> maggiore di (7 > 3; sette è maggiore di tre)
< minore di (5 < 8; cinque è minore di 8)

OPERAZIONI CON I NUMERI NATURALI

ADDIZIONE

L'**addizione** è l'**operazione** con cui si **calcola la somma di due o più numeri naturali**, chiamati **addendi**. Il risultato sarà un numero naturale.
Le **proprietà** dell'addizione sono:

- **commutativa**
- **associativa**
- **dissociativa**

P**roprietà commutativa**: la somma di due o più numeri naturali non cambia se si cambia l'ordine degli addendi.
Esempio: 27 + 30 + 5 = 62 (addizione di partenza)
5 + 27 + 30 = 62 (addizione eseguita applicando la proprietà commutativa)

P**roprietà associativa:** la somma di due o più numeri naturali non cambia se a due o più di essi si sostituisce la loro somma.
Esempio: 65 + 5 + 23 = 93 (addizione di partenza)
70 + 23 = 93 (addizione eseguita applicando la proprietà associativa)

P**roprietà dissociativa**: la somma di due o più numeri naturali non cambia se gli addendi vengono riscritti come somma di due fattori.
Esempio: 45 + 83 = 128 (addizione di partenza)
(40+5) + (80+3) = 128 (addizione eseguita applicando la proprietà dissociativa)

SOTTRAZIONE

La sottrazione è l'operazione con cui si calcola la differenza tra due numeri naturali**.**

7 – 5 = 2 ➡ 2 + 5 =7

Il primo numero si chiama **minuendo** e il secondo **sottraendo**.
La sottrazione ha un'unica proprietà, quella **invariantiva**.
Proprietà invariantiva: sommando o sottraendo (se è possibile) uno stesso numero sia al minuendo sia al sottraendo di una sottrazione, la differenza non cambia.
Esempio: 26 – 8 = 18 (sottrazione di partenza)
(26 + 2) – (8 + 2) = 18 (sottrazione eseguita applicando la proprietà invariantiva, sommando uno stesso numero sia al minuendo sia al sottraendo)
(26 – 4) – (8 – 4) = 18 (sottrazione eseguita applicando la proprietà invariantiva, sottraendo uno stesso numero sia al minuendo sia al sottraendo)

MOLTIPLICAZIONE

La moltiplicazione è l'operazione tra due numeri naturali chiamati fattori che ha per soluzione un terzo numero naturale detto **prodotto**.
Può essere vista come una addizione con addendi uguali: 5 +5 + 5 +5 +5 +5 = 5 x 6
6
Le **proprietà** della moltiplicazione sono:

- **commutativa**
- **associativa**
- **dissociativa**

- **distributiva**

Proprietà commutativa: il prodotto di due o più numeri naturali non cambia se si cambia l'ordine dei fattori.
Esempio: 2 x 5 x 12 = 120 (moltiplicazione di partenza)
2 x 12 x 5 = 120 (moltiplicazione eseguita applicando la proprietà commutativa)
Proprietà associativa: il prodotto di due o più numeri naturali non cambia se a due o più di essi si sostituisce il loro prodotto.
Esempio: 6 x 4 x 25 = 600 (moltiplicazione di partenza)
24 x 25 = 600 (moltiplicazione eseguita applicando la proprietà associativa, sostituendo al 6 x 4 il suo risultato, cioè 24)
Proprietà dissociativa: il prodotto di due o più numeri naturali non cambia se i fattori vengono riscritti come prodotto di due fattori.
Esempio: 25 x 12 = 300 (moltiplicazione di partenza)
25 x (4 x 3) = 300 (moltiplicazione eseguita applicando la proprietà dissociativa)
Proprietà distributiva: per moltiplicare un numero per una somma (o una differenza) si può moltiplicare quel numero per ciascun termine dell'operazione data e poi addizionare (o sottrarre) i prodotti ottenuti.
Esempio: 3 x (6 + 4) = 3 x 10 = 30 (moltiplicazione di partenza)
(3 x 6) + (3 x 4) = 30 (moltiplicazione eseguita applicando la proprietà distributiva)
3 x (12 – 4) = 3 x 8 = 24 (moltiplicazione di partenza)
(3 x 12) – (3 x 4) = 36 – 12 = 24 (moltiplicazione eseguita applicando la proprietà distributiva)

DIVISIONE

La divisione tra due numeri naturali è un terzo numero naturale che, se esiste, moltiplicato per il secondo dà per risultato il primo.

12 : 4 = 3 ⇒ 3 x 4 = 12

Il primo termine della divisione viene detto **dividendo,** il secondo viene detto **divisore**, il risultato viene detto **quoziente**.
Il quoziente moltiplicato per il divisore dà il dividendo.
La divisione ha una proprietà, quella **invariantiva**.
Proprietà invariantiva: moltiplicando o dividendo (se possibile) per uno stesso numero diverso da zero entrambi i termini della divisione, il quoziente non cambia e il resto, se c'è, rimane moltiplicato o diviso per quello stesso numero.
Esempio: 18 : 6 = 3 (divisione di partenza)
(18 x 5) : (6 x 5) = 90 : 30 = 3 (divisione eseguita applicando la proprietà invariantiva)
(18 : 3) : (6 : 3) = 6 : 2 = 3 (divisione eseguita applicando la proprietà invariantiva).

LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO

La legge **di annullamento del prodotto** afferma che: se un **prodotto** è uguale a zero allora almeno uno **dei** fattori sarà uguale a zero……..**a x b = 0 ⇒ a = 0 ∨ b = 0**

Divisione
Se il dividendo è uguale al divisore il quoziente è 1
Esempio: 17 : 17 = 1
Se il divisore è 1 il quoziente è uguale al dividendo
Esempio: 17 : 1 = 17
Se il dividendo è 0 e il divisore è un numero diverso da 0, il quoziente è uguale a 0
Esempio: 0:17 = 0

Se il divisore è 0 e il dividendo è un numero diverso da 0, il quoziente non esiste
Esempio: 17:0 = impossibile, **la divisione per zero è sempre impossibile**.

$17 : 0 = b \Rightarrow b \times 0 = 0 \quad b \times 0 \neq 17$

Se il dividendo e il divisore sono uguali a 0, il quoziente è indeterminato
Esempio: 0:0 = indeterminato

ELEVAMENTO A POTENZA

La potenza di un numero è il prodotto di tanti fattori uguali a quel numero (detto base) quanti ne indica l'esponente. esponente

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7 = 128$

2^7 **esponente** **base**

PROPRIETA' DELLE POTENZE

Il **prodotto** di due o più **potenze** aventi la stessa base è una potenza che ha la stessa base e per esponente la somma degli esponenti.
Esempio: $\mathbf{2^3 \times 2^4 = 2x2x2 \times 2x2x2x2 = 2^{3+4} = 2^7}$

Il **quoziente** di due **potenze** aventi la stessa base è una potenza che ha la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti.
Esempio: $\mathbf{2^7 : 2^3 = 2^{7-4} = 2^3}$

La **potenza** di una **potenza** è una potenza che ha la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti.
Esempio: $\mathbf{(2^7)^3 = 2^{7 \times 3} = 2^{21}}$

Il **prodotto** di due o più **potenze** aventi lo **stesso esponente** è una potenza che ha lo stesso esponente e per base il prodotto delle basi
Esempio: $\mathbf{2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3 = 10^3}$

Il **quoziente** di due **potenze** aventi lo stesso **esponente** è una potenza che ha lo stesso esponente e per base il quoziente delle basi.
Esempio: $\mathbf{12^2 : 3^2 = (12 : 3)^2 = 4^2}$

POTENZE PARTICOLARI:

L'elevamento a potenza è una moltiplicazione tra fattori tutti uguali. Dovrebbero quindi essere presenti almeno due per cui $\mathbf{a^1}$ e $\mathbf{a^0}$ inizialmente rappresentano solamente due simboli a cui però voglio dare un significato tale che mi consenta di poter estendere le proprietà delle potenze già viste ($\mathbf{a^n . a^m = a^{n+m}}$; $\mathbf{a^n : a^m = a^{n-m}}$)

- Qualunque potenza con esponente **1** è uguale alla base $\mathbf{3^1 = 3.}$

$\mathbf{3^4 : 3^3 = 3^{4-3} = 3^1}$ voglio che questa proprietà venga mantenuta sempre ma

$\mathbf{3^4 : 3^3 = (3\ \cancel{3\ 3\ 3}):(\cancel{3\ 3\ 3}) = 3}$ pongo quindi $\mathbf{3^1 = 3}$

-Qualunque potenza con base **1** è uguale a **1** $\mathbf{1^{17} = 1(1x\ 1x\ 1x\ 1x\ 1\ ....\ = 1)}$

-Qualunque potenza con **esponente 0** e **base ≠ 0** è uguale a 1 $\mathbf{3^0 = 1.}$

Giustifico questo fatto: $3^4 : 3^4 = 1$. Se dividendo e divisore sono uguali il quoziente è sempre 1.
Voglio estendere anche in questo caso la proprietà delle potenze $\mathbf{3^4 : 3^4 = 3^{4-4} = 3^0.}$

Per estendere anche in questo caso la proprietà già presente pongo $\mathbf{3^0 = 1}$
– Qualunque potenza con base zero e esponente diverso da zero è uguale a 0
– Qualunque potenza con base zero ed esponente zero non ha significato

ESTRAZIONE DI RADICE

L'estrazione di radice è l'operazione inversa dell'elevamento a potenza.

$\sqrt[4]{81} = 3$ ➡ $3^4 = 81$ **4 indice del radicale, 81 radicando, 3 radice**

L'estrazione di radice è l'operazione che calcola il numero (radice) che elevato all'indice dà il radicando $\sqrt[5]{32} = ?$

Qual è quel numero che elevato a 5 dà 32? $\sqrt[5]{32} = 2$ ➡ $2^5 = 32$

LOGARITMO

L'elevamento a potenza ha anche un'altra inversa: il **logaritmo**

Il logaritmo del numero **b** in base **a** è quel numero **c** a cui dobbiamo elevare **a** per ottenere **b**.

$$c = \log_a b \quad \Rightarrow \quad a^c=b$$

I logaritmi furono introdotti da Nepero all'inizio del 1600, e trovarono subito applicazione nelle scienze e nell'ingegneria, soprattutto come strumento per semplificare calcoli con numeri molto grandi, grazie all'introduzione di *tavole di logaritmi.*

La semplificazione avviene perché i calcoli con i logaritmi permettono di trattare i prodotti come somme e le potenze come prodotti. Fino all'introduzione delle calcolatrici tascabili le tavole dei logaritmi costituivano l'unico strumento per eseguire calcoli complessi. Anche il regolo calcolatore, che veniva utilizzato quando era richiesta una esattezza minore, funziona utilizzando i logaritmi.

Prodotto	Potenza
$x = \log_a b \quad a^x=b$ $y = \log_a c \quad a^y=c$ $a^x a^y = b\,c \quad a^{x+y}= b\,c$ $x + y = \log_a b\,c$ $\log_a b\,c = \log_a b + \log_a c$	$x = \log_a b \quad a^x=b \,/(\,)^n$ $(a^x)^n = b^n \quad a^{x\,n} = b^n$ $nx = \log_a b^n$ $\log_a b^n = n \log_a b$
Il logaritmo di un prodotto è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori.	**Il logaritmo di una potenza è uguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo della base.**

CHE COS'È IL pH

Il **pH** è una scala di misura utilizzata per esprimere il carattere acido o basico delle soluzioni:

un pH inferiore a 7 (pH < 7) indica una soluzione acida

un pH superiore a 7 (pH > 7) indica una soluzione basica

Nell'acqua sono presenti **ioni di idrogeno (H^+)** e **ioni ossidrili (OH^-)**, derivanti dalla rottura della molecola dell'acqua (H_2O).

Se gli ioni idrogeno e gli ioni ossidrili si equivalgono la **soluzione è neutra (pH = 7)**, condizione tipica dell'acqua pura a 25°C.

Se prevalgono gli ioni ossidrili la soluzione è **basica o alcalina (pH > 7)**. Ad es. acqua di mare, sapone, ammoniaca per uso domestico.

Se prevalgono gli ioni idrogeno la soluzione è **acida (pH < 7)**. Ad es. succo di limone, vino, birra, caffé...

Il pH si ottiene:

$$\mathrm{pH} = -\log_{10} [H^+]$$

Valori rappresentativi di pH

Sostanza	pH
Acido cloridrico 1 M	0
Succo gastrico	1,0 – 2,0
Coca Cola e succo di limone	2,5
Aceto	2,9
Succo di arancia	3,7
Birra	4,5
Pioggia acida	4,5 - 4,8
Caffè	5,0
Tè e pelle sana	5,5
Acqua deionizzata a 25 °C	5,5 - 6,0
Acqua ossigenata	6,2
Latte ben conservato	6,5 - 6,7
Acqua distillata a 25 °C	7,0
Saliva umana normale	6,5 – 7,5
Sangue	7,35 - 7,45
Acqua di piscina regolare	7,2 - 7,8
Acqua di mare	7,7 – 8,3
Bicarbonato di sodio	8,31
Saponi alcalini	9,0 - 10,0
Ammoniaca	11,5
Varechina	12,5
Liscivia	13,5
Idrossido di sodio 1 M	14