



MATEMATICA

(Giulio Salvador)

8 gennaio 2019 – 15:30

SIAMO TUTTI MATEMATICI

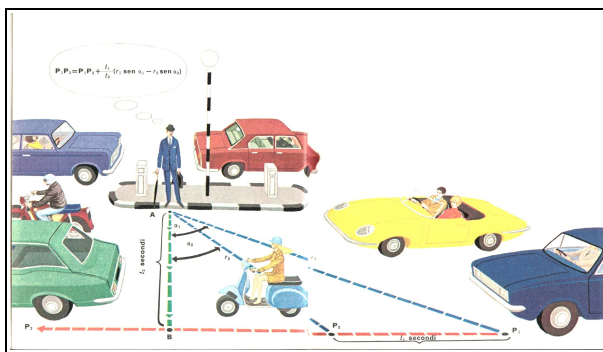
(ma non ce lo hanno detto)

1 - Presentazione

Non sono un matematico, ma la ho usata nella mia vita professionale.

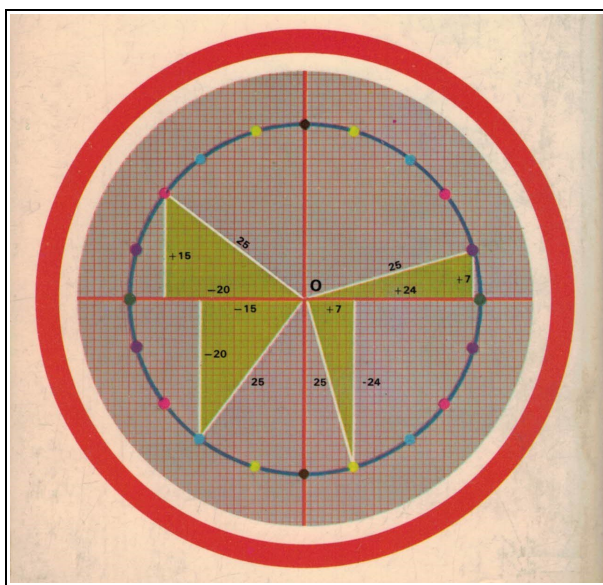
Tutti usiamo la matematica, anzi è una cosa innata in noi. Se per leggere e scrivere dobbiamo studiare forse per usare la matematica basta il buon senso e l'istinto (ad esempio un selvaggio che dovesse condividere del cibo si renderebbe subito conto se la divisione rispetta la frazione $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ e si arrabberebbe (o meno) di conseguenza).

- non facciamo sforzi, la vita è semplice e il cervello fa i calcoli per noi
- esempio attraversamento strada. L'attraversamento di una strada presuppone un calcolo complicato e multidisciplinare (stima delle distanze, stima delle velocità, determinazione del punto di incrocio dei percorsi, quindi fisica, trigonometria, statistica, analisi). Tuttavia se leggete queste righe stando in poltrona e non in un letto d'ospedale vuol dire che i vostri calcoli sono stati eseguiti in maniera corretta. Anche se non ci avete fatto troppo caso.



Attraversare la strada: guardate quanti calcoli eseguite per farlo senza essere investiti!

- altro esempio: $\frac{1}{2}$ kg a 2.40, proprietà commutativa ($A \times B = B \times A$) e calcolo mnemonico ($*0.5 = /2$)
- esempio geometrico (trigonometria)



Le funzioni trigonometriche

I numeri sono di vario tipo

TIPI DI NUMERI

Quando parliamo di "numeri" noi siamo portati con naturalezza a pensare innanzitutto ai numeri detti appunto "naturali", 1, 2, 3, e così via. Ma vi sono almeno cinque tipi di numeri, alcuni dei quali ne includono altri come proprie sottoclassi, mentre alcuni sono indipendenti dai restanti.

In aggiunta ai numeri naturali abbiamo gli stessi simboli, ognuno con un segno meno messo davanti. Tutti insieme questi costituiscono gli interi (positivi e negativi). Vengono poi i numeri razionali: questi comprendono (oltre agli interi) tutti i numeri che possono venire espressi come frazioni ordinarie o come decimali limitati o periodici. Fra questi ci sono, ad esempio, $\frac{3}{5}$ (cioè 0,6), $\frac{1}{7}$ (cioè 0,142857), dove l'ultimo è un decimale periodico, cioè un decimale in cui una cifra o una serie di cifre si ripetono periodicamente.

Non sono compresi numeri quali $\sqrt{2}$ (la radice quadrata di due), che espressa in decimali risulta essere 1,41421... Le cifre decimali proseguono all'infinito, ma senza che si riveli alcun modello riconoscibile. Essi non sono "razionali" proprio in quanto non possiamo trovare un valore preciso per essi, anche se possiamo approssimarci all'esattezza quanto necessario. Se volete sapere la lunghezza della diagonale di un quadrato con un lato, diciamo, di un chilometro, la vostra soluzione sarà $\text{km } 1\sqrt{2}$; e se prendete l'approssimazione $\sqrt{2} = 1,41421$ vi discosterete dal risultato giusto solo di una quantità trascurabile.

È difficile pensare a un qualche calcolo in cui questo margine di errore sia degno di preoccupazione; tuttavia, se vi trovaste a fare un calcolo che richiedesse tale grado di precisione, basterebbe spostare l'approssimazione a qualche cifra decimale in più. Tutti questi numeri sono, ovviamente, "reali"; essi possono essere riportati su un grafico, come vedremo quando arriveremo al capitolo sulla "Matematica rappresentata visivamente". Ciò, tuttavia, non vale per i numeri "immaginari", quali $\sqrt{-1}$ (spesso indicato con i).

Voi potete, come abbiamo visto, avvicinarvi quanto volete alla precisione nel calcolare $\sqrt{2}$, ma non vi è modo di trovare un valore sia pur approssimato per $\sqrt{-1}$ o di rappresentarlo su un grafico. (I grafici sono a volte usati per illustrare l'uso dei numeri immaginari, ma non è assolutamente la stessa cosa.)

Questo è un ostacolo che molti studenti trovano difficile da superare; forse la via più semplice è considerare $\sqrt{-1}$ e altri numeri "immaginari" come operatori. Quando moltiplichiamo 4×3 , 4 è il numero in quanto tale e 3 è l'operatore; in questo caso particolare, la distinzione è inessenziale, perché 4×3 coincide con 3×4 . Nella divisione non è così: $10 : 5$ non è lo stesso di $5 : 10$. I numeri 0 e infinito (o ∞) non dovrebbero mai venir usati come operatori nell'aritmetica elementare; $0 \times 3 = 0$ è un enunciato legittimo; 3×0 è sostanzialmente privo di senso. Ugualmente, $\infty \times 4 = \infty$ è una proposizione corretta; $4 \times \infty$ è una assurdità matematica. Che sarebbe 0×0 , o $\infty \times \infty$? Quando si occupano di lunghezze d'onda, gli studiosi di elettricità considerano il movimento di una linea retta attra-

Tipi di numeri					
numeri "naturali"	+1	+2	+3	+4	+5
numeri interi	-2	-1	0	+1	+2
numeri razionali	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{2}{7}$	$+\frac{3}{20}$	$+\frac{4}{11}$	
	-0,625	-0,285714	+0,15	+0,36	
numeri "reali"	$-\sqrt{7}$	$-n$	$+e$	$+\sqrt{11}$	
	-2,64575...			-3,14159...	
	+2,71828...			+3,1647...	
numeri "immaginari"	$\sqrt{-1}$	$\sqrt{-4}$	$\sqrt{-7}$		
numeri complessi	$3 + \sqrt{-1}$	$\sqrt{7} + \sqrt{-5}$			

Tipi di numeri

Convenzioni, gerarchia delle operazioni

CAPITOLO PRIMO

NEL QUALE IL CORTESE LETTORE È PREGATO DI NON FARE SFORZI INUTILI PER CAPIRE CIÒ CHE È EVIDENTE

1. Difficoltà che si incontrano nel comprendere una cosa troppo semplice. — Il calcolo differenziale ed integrale presenta, come tutte le scienze, degli sviluppi la cui difficoltà è grandissima. In compenso esso è nei suoi principi essenziali d'una semplicità che sconcora. Non si osa quasi credere ch'esso sia così semplice.

Il principiante che si prepara ad spiegare chi sa quale faticoso sforzo cerebrale, mira troppo in alto, fallisce il suo scopo e, sgomentato, si rassegna ad imparare press'a poco a memoria, finché un giorno, con l'aiuto della pratica, riesce a capire da solo ciò che una maldestra pedagogia gli aveva fino allora nascosto: egli è che non esiste alcuna scienza, per quanto elevata, che non trovi la sua

Spesso la realtà matematica è più semplice di quanto pensiamo

2 - MISURE

Unità di misura: quantità predefinita e stabilita (per legge) di una certa grandezza fisica, atta a esprimere la dimensione di oggetti dello stesso tipologia. Quasi sempre hanno nomi e/o simboli convenzionali. Quasi sempre multipli e sottomultipli.

Data l'unità si definisce misura il numero di volte che l'unità sta nell'oggetto o nella cosa da misurare.

Per lo più si cerca di usare lo stesso ordine di grandezza in modo da semplificare i calcoli (non ha senso parlare di cm per percorsi in auto, e così via).

Il sistema attualmente in uso, con legge dello Stato del 1982.

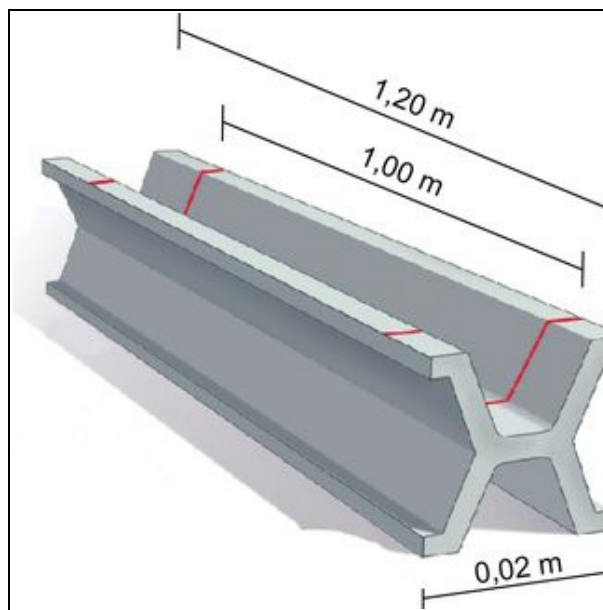
SI = SISTEMA INTERNAZIONALE, relativamente recente. Da noi anche SISTEMA METRICO DECIMALE.

Altri sistemi: quello americano e quello "imperiale" Inglese.

Nella pratica MKS (metro, kilo, secondo).

Ma anche CGS (centimetro grammo secondo, più adatto per fenomeni scientifici).

Le unità spesso erano dei campioni (esempio metro di Parigi, KG)



Il campione del metro (ormai obsoleto)



Il campione del kilogrammo (ormai obsoleto)



Un esempio di unità di misura medioevale, vicino a noi: la “Macia” di Spilimbergo (PN), misura per i tessuti. E' incisa davanti all'edificio comunale in modo da essere facilmente accessibile per tutti



Un altro esempio di unità di misure accessibili a tutti: queste sono a Senigallia

Oggi si tende a riportarle con sistemi più moderni e soprattutto riproducibili in laboratorio. Così il metro: "Nel 1983 la XVII Conferenza generale di pesi e misure definì il metro come la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in $1/299\,792\,458$ di secondo (ovvero la velocità della luce nel vuoto venne definita essere $299\,792\,458$ metri al secondo). Poiché si ritiene che la velocità della luce nel

vuoto sia la stessa ovunque, questa definizione è più universale della definizione basata sulla misurazione della circonferenza della Terra o della lunghezza di una specifica barra di metallo e il metro campione può essere riprodotto fedelmente in ogni laboratorio appositamente attrezzato. L'altro vantaggio è che può (in teoria) essere misurato con precisione superiore rispetto alla circonferenza terrestre o alla distanza tra due punti.". Analogamente per altre unità....

Il SI si basa su misure fondamentali.

Grandezza fisica	Simbolo della grandezza fisica	Nome dell'unità SI	Simbolo dell'unità SI
Intensità di corrente elettrica	I, i	ampere	A
Intensità luminosa	I_v	candela	cd
Lunghezza	L	metro	m
Massa	m	chilogrammo	kg
Quantità di sostanza	n	mole	mol
Temperatura termodinamica	T	kelvin	K
Intervallo di tempo	t	secondo	s

..e poi ci sono le unità derivate

Grandezza fisica	Simbolo della grandezza fisica	Nome dell'unità SI	Simbolo dell'unità SI	Equivalenza in termini di unità fondamentali SI
Nomi e simboli speciali				
frequenza	f, ν	hertz	Hz	s^{-1}
forza	F	newton	N	$kg \cdot m \cdot s^{-2}$
pressione	p	pascal	Pa	$N \cdot m^{-2}$
energia, lavoro, calore, entalpia	E, W, Q, H	joule	J	$N \cdot m$
potenza	P	watt	W	$J \cdot s^{-1}$
viscosità dinamica	μ, η	pasecchia	Pa·s	$Pa \cdot s$
carica elettrica	Q	coulomb	C	$A \cdot s$
potenziale elettrico, forza elettromotrice, tensione elettrica	$V, \phi, \mathcal{E}$	volt	V	$J \cdot C^{-1}$
resistenza elettrica	R	ohm	Ω	$V \cdot A^{-1}$
conduttanza elettrica	G	siemens	S	$A \cdot V^{-1}$
capacità elettrica	C	farad	F	$C \cdot V^{-1}$
densità flusso magnetico	B	tesla	T	$V \cdot s \cdot m^{-2}$
flusso magnetico	$\Phi(B)$	weber	Wb	$V \cdot s$
induttanza	L	henry	H	$V \cdot s \cdot A^{-1}$
temperatura	T	grado Celsius	$^{\circ}C$	K
angolo piano ⁽¹⁾	α, φ, θ	radiante	rad	1
angolo solido ⁽²⁾	Ω	steradiano	sr	1
flusso luminoso	$\Phi(v)$	lumen	lm	$cd \cdot sr$
illuminamento	E_v	lux	lx	$cd \cdot sr \cdot m^{-2}$
potere dielettrico	ϵ_r	diottria	D	m^{-1}
attività di un radionuclide ⁽³⁾	A_R	becquerel	Bq	s^{-1}
dose assorbita	D	gray	Gy	$J \cdot kg^{-1}$
dose equivalente, dose efficace	H, E_{eq}	sievert	Sv	$J \cdot kg^{-1}$
attività catalitica		katal	kat	$mol \cdot s^{-1}$
Altre grandezze fisiche				
area	A	metro quadro	m^2	m^2
volume	V	metro cubo	m^3	m^3
velocità	v	metro al secondo	m/s	$m \cdot s^{-1}$
accelerazione	a		m/s^2	$m \cdot s^{-2}$
velocità angolare	ω			$rad \cdot s^{-1}$
accelerazione angolare	α, β			$rad \cdot s^{-2}$
densità	ρ, σ	chilogrammo al metro cubo	kg/m^3	$kg \cdot m^{-3}$
viscosità sp ⁽¹⁾	η			$mol \cdot dm^{-1} \cdot s^{-1}$
viscosità motore	η_v			$mol \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$

Scrittura corretta:

dopo la misura, senza punteggiatura, in maiuscolo se è un abbreviazione, in minuscolo se è un nome esteso (anche se di scienziato), senza "s" plurale.

Molte sono le eccezioni (esempio A=Ampere, W=Watt). Mentre i prefissi seguono regole proprie (M=Mega, k=kilo)

Multipli e sttomultipli

Prefissi del Sistema Internazionale				
10^n	Prefisso	Simbolo	Nome	Equivalente decimale
10^{24}	yotta	Y	Quadrilione	1 000 000 000 000 000 000 000 000
10^{21}	zetta	Z	Triliardo	1 000 000 000 000 000 000 000
10^{18}	exa	E	Trillione	1 000 000 000 000 000 000
10^{15}	peta	P	Billardo	1 000 000 000 000 000
10^{12}	tera	T	Billione	1 000 000 000 000
10^9	giga	G	Miliardo	1 000 000 000
10^6	mega	M	Milione	1 000 000
10^3	kilo	k	Mille	1 000
10^2	hecto	h	Cento	100
10^1	deca	da	Dieci	10
10^0			Uno	1
10^{-1}	deci	d	Decimo	0,1
10^{-2}	centi	c	Centesimo	0,01
10^{-3}	milli	m	Millesimo	0,001
10^{-6}	micro	μ	Millesimo	0,000 001
10^{-9}	nano	n	Miliardesimo	0,000 000 001
10^{-12}	pico	p	Bilionesimo	0,000 000 000 001
10^{-15}	femto	f	Biliardesimo	0,000 000 000 000 001
10^{-18}	atto	a	Trilionesimo	0,000 000 000 000 000 001
10^{-21}	zepto	z	Triliardesimo	0,000 000 000 000 000 000 001
10^{-24}	yocto	y	Quadrilionesimo	0,000 000 000 000 000 000 000 001

Eccezioni binarie (non seguite): "Nel 1998 il SI ha introdotto i prefissi per multipli binari per evitare che i prefissi standard, relativi a multipli decimali, vengano usati per i multipli binari, che di regola andrebbero usati ad esempio per indicare i multipli binari dei byte; è comunque ancora usata la convenzione secondo cui, quando l'unità di misura è il byte o quelle da essa derivata, per kilo si intenda 1024 e non 1000, anche se si tratta in realtà di un errore.

I prefissi per i multipli binari hanno lo scopo di operare secondo le potenze di 2 piuttosto che secondo le potenze di 10. Il simbolo è quello standard con l'aggiunta di "i".

Così 1 kB equivale in realtà a 1 000 B, mentre 1 kiB equivale a 1 024 B. Un hard-disk da 2 TB ha capacità pari a 2 000 000 000 000 B o di ~1,819 TiB, un computer con memoria da 4 GiB ha una capacità di 4 294 967 296 B o di ~4,295 GB."

Unità tollerate ed usuali.

UNITA' uso comune (giorno eccetera)

Nome	Simbolo	Equivalenza in termini di unità fondamentali SI
minuto	min	1 min = 60 s
ora	h	1 h = 60 min = 3 600 s
giorno	d	1 d = 24 h = 1440 min = 86 400 s
litro	l, L ^[4]	1 L = 1 dm ³ = 10 ⁻³ m ³
grado d'arco	°	1° = (π /180) rad
minuto primo	'	1' = (1/60)° = (π /10 800) rad
minuto secondo	"	1" = (1/60)' = (π /648 000) rad
ettaro	ha	1 ha = 1 hm ² = 10 ⁴ m ²
tonnellata	t	1 t = 10 ³ kg = 10 ⁶ g

UNITA' più precise dell'SI

Nome	Simbolo	Equivalenza in termini di unità fondamentali SI
elettronvolt	eV	$1 \text{ eV} = 1,602\,176\,53(14) \times 10^{-19} \text{ J}$
unità di massa atomica	u	$1 \text{ u} = 1 \text{ Da} = 1,660\,538\,86(28) \times 10^{-27} \text{ kg}$
unità astronomica	ua	$1 \text{ ua} = 1,495\,978\,706\,91(6) \times 10^{11} \text{ m}$

UNITA' uso corrente (miglio marino e cose del genere)

Nome	Simbolo	Equivalenza in termini di unità fondamentali SI
angstrom	Å	$1 \text{ Å} = 0,1 \text{ nm} = 10^{-10} \text{ m}$
miglio nautico	nm	$1 \text{ miglio nautico} = 1\,852 \text{ m}$
nodo	kn	$1 \text{ nodo} = 1 \text{ miglio nautico all'ora} = (1\,852/3\,600) \text{ m/s}$
barn	b	$1 \text{ b} = 100 \text{ fm}^2 = 10^{-28} \text{ m}^2$
bar	bar	$1 \text{ bar} = 0,1 \text{ MPa} = 100 \text{ kPa} = 1\,000 \text{ hPa} = 10^5 \text{ Pa}$
millimetro di mercurio	mmHg	$1 \text{ mmHg} \approx 133,322 \text{ Pa}$
neper ^[15]	Np	$1 \text{ Np} = e$ qualsiasi unità fondamentale del SI
bel ^[15]	B	$1 \text{ B} = (\ln 10)/2 \text{ Np} = 10$ qualsiasi unità fondamentale del SI

Cambiare/trasformare multiplo o sottomultiplo: normalmente basta aggiungere o togliere degli zeri (o spostare la virgola). In campo ingegneristico spesso si opera con tre zeri alla volta (ad esempio kg, g, t, rispettivamente unità convenzionalmente “di base”, diviso mille, moltiplicato mille. Questo è molto evidente in fisica (es Hz, kHz, MHz)

Decimale, binario, altro, (sessagesimale) (le dita dell'uomo)

Sessagesimale e sessadecimale

Calcoli sessagesimali (non solo per angoli, ma anche per il tempo)

Cenno a come Excel tratta le date e gli orari (lo fa partendo da un giorno “uno” convenzionale, le ore sono decimali del giorno. In effetti le celle sono poi formattate in modo da poter vedere la notazione comune, ma al loro interno sono numeri decimali. Questo semplifica i calcoli del tipo “quanti giorni fra due date? Che data sarà dopo 'n' giorni?”)

3 - IL CONTO DEL SALUMIERE

Parleremo di proporzioni, forse una delle cose più usate e più pratiche della matematica, ma anche di potenze (utile per i logaritmi e già utile per i calcoli mnemonici come abbiamo visto) e faremo un accenno alle radici quadrate, oggi poco usate in via cartacea.

PROPORZIONI

PROPORZIONE MATEMATICA: la definizione è semplicissima: è l'uguaglianza di due (o più) rapporti

Che poi questo abbia delle conseguenze e dei trucchi fa parte del discorso secondo cui siamo tutti matematici ma non ce lo hanno detto.

Da un punto di vista dei numeri $10/2=5$. Ma anche $25/5=5$. E anche $50/10=5$

Potremo scrivere $10:2=25:5$ e non avremmo aggiunto niente alla frase precedente (a parte che si dice "sta...come" e non "diviso uguale diviso") perché $5=5$... evidente!

In natura spesso abbiamo a che fare con due grandezze, ad esempio possiamo pensare a un rettangolo che notoriamente a due lati differenti (cose della stessa natura), ma possiamo anche pensare ad un prosciutto che costa un tanto e pesa un tot (cose di natura differente - se il nostro insegnante di matematica ci diceva che non si possono moltiplicare cavoli e aranci forse aveva una visione un po' limitata sulle proporzioni!).

NOTA: non tutto è lineare, e quindi le proporzioni non sempre si possono applicare. Spesso vengono applicate a medie (esempio: auto, percorrenze, spazi di frenata eccetera).

Ecco "costa un tanto e pesa un tot". Le parole sono due. Allora possiamo dire che peso/costo è un rapporto. In base alla definizione ci deve essere un altro, anzi tanti altri, rapporti che come risultato ci danno lo stesso valore.

Quindi possiamo voler acquistare un determinato quantitativo di prosciutto (ad esempio 2 etti) e deve esistere una divisione che ci dice costo/2 etti è un valore uguale a costo del prosciutto/il suo peso.

Proviamo a mettere in ballo delle cifre...

Un prosciutto pesa 6 kg e costa 80 €.

Quindi scriveremo $6/80$. Prendiamo la calcolatrice e scopriamo che questa operazione vale 0.075. Non preoccupiamoci di cosa vuol dire questo numero, è un numero "puro" ovvero il risultato della divisione di due numeri di cui potremmo non sapere nulla.

Adesso abbiamo acquistato 2 etti di prosciutto. Intanto (lo abbiamo visto l'altra volta) 2 etti sono 0.2 kg. E' importante, quando si fanno questi calcoli, ragionare sempre con le stesse unità di misura, nel nostro caso kg ed €!

Abbiamo detto peso/soldi=risultato. Nel nostro caso: $0.2/\text{soldi}=0.075$.

Ve lo dico io: dobbiamo scoprire quanto vale il termine "soldi", e siccome questa è una piccola equazione ecco il risultato:

$0.2/0.075=2.67$ € (sarebbero 2.6666 periodico)

Quindi la risposta: noi, per onorare il conto del salumiere, dovremo sborsare 2.67 € (mi sembrano ragionevoli, per 20 deca de persuto!)

Intanto verifichiamo:

Abbiamo detto che il prosciutto da 6 kg costava 80 €, e quindi $6/8=0.075$

Siccome abbiamo detto che la proporzione è una eguaglianza di rapporti, anche

2 etti, ovvero 20 deca (di nuovo il richiamo alle unità di misura, sono perfido!) = 0.2 kg che costano 2.67 € devono rispettare la divisione:

$0.2/2.67=...$ 0.074906367, ovvero 0.075.

Quello che avevamo intuito è provato!

Nella pratica un'operazione così macchinosa non è fattibile (né è logico farla) a livello di salumeria, e si preferisce usare un passaggio intermedio: nel nostro caso si determinerà il prezzo al kg o, meglio, quello all'etto (è inutile che vi dica che le cose che si comperano ad etto avranno prezzi all'etto, le patate, che si comperano a kg, avranno prezzi al kg)

Di nuovo:

6 kg di prosciutto / 80 € deve essere uguale a 1 kg di prosciutto diviso qualcosa in modo che i due risultati della divisione siano uguali.

Salto i passaggi di prima e vi dò subito il risultato: 13.33 €/kg, ovvero 1.33 €/hg

Fin qui, a parte la divisione, sono concetti che viviamo ogni giorno, perché se un prosciutto pesa 6 kg e costa 80 € è evidente che $80/6$ è il costo al kg. (13.33 €/kg) ovvero 1.33 €/hg

Trucco: in una proporzione del tipo $a:b=c:d$ a e d sono detti “estremi”, b e c “medi”. Il prodotto dei medi è uguale a quello degli estremi ($a*d=b*c$). Ne consegue che se cerchiamo uno dei quattro termini (incognita, nel nostro caso quanto dovremo pagare il salumaio) basta individuare la coppia nota, moltiplicarne i termini e dividere per il termine noto della coppia “tronca”.

Spesso si ha un termine pari ad “1” nel calcolo (esempio 1 kg di prosciutto costa 13.33 €, allora 1:13.33). In questi casi il calcolo è semplificato, e spesso si riduce ad una semplice moltiplicazione. In effetti però è una proporzione semplificata grazie alla presenza di quell'unità (è noto che $a*1=a$, e analogamente $a/1=a$)

Merita osservare (ed è più evidente in fisica) che oltre ai numeri le semplificazioni si possono fare anche sui simboli. Così (ad esempio) €/kg * kg fa € (ed è giusto perché è quello che dobbiamo pagare).

Ci sono proprietà nella proporzione con cui qualche volta bisogna combattere, ad esempio se $a:b=c:d$ anche $a:c=b:d$, oppure $(a+b):a=(c+d):c$. Non approfondiamo, sappiate solo che ci sono queste regole e che possono essere utili.

Un esempio pratico: le fotografie hanno spesso un rapporto (fra i lati dell'immagine) di 3:2, infatti la copia cartacea ha (commercialmente) una base di 15 cm e un'altezza di 10. Ma anche 30x20. Ma anche 2304x1536 pixel....

POTENZE

Se ho un numero qualsiasi, prendiamo il solito 3, lo posso moltiplicare per se stesso un numero "n" di volte:

$$3 \times 3$$

$$3 \times 3 \times 3$$

$$3 \times 3 \times 3 \times 3$$

eccetera

Il numero di volte che questo numero compare nella formula è detto POTENZA del numero.

E si indica (usare la simbologia classica o quella lineare 3^n)

La potenza può essere qualsiasi, ma quella certamente più usata è quella del 2 (quadrato), un po' meno quella del 3 (cubo) e ancora meno le altre.

Diciamo anche che se ho un numero e risolvo le sue potenze intere ottengo una serie (termine lessicale ma anche matematico, lo vedremo in futuro) di numeri, così 3, 9, 27, 81. E' intuibile che sono potenze di 3, ovvero 3^1 , 3^2 , 3^3 , 3^4 e così via.... In mezzo ci devono essere delle altre elevazioni (decimali) che ci danno i numeri intermedi, così esisterà un 3^m che, come risultato ci darà, ad esempio, 20 (o 42, o un qualsiasi numero di cui non abbiamo ancora parlato). Vi dico solo che esiste e si chiama logaritmo. Lo vedremo!

Vi dico anche, senza perdermi in dimostrazioni, che esiste anche la possibilità di elevare un numero allo zero! qualsiasi numero $^0 = \text{UNO!}$

Vi dico anche, senza perdermi in dimostrazioni, che esiste anche la possibilità di elevare un numero ad un numero negativo: numero $^{-m} = 1/\text{numero}^m$

C'è anche la possibilità di elevare a una frazione, ma è un caso particolarissimo. Vedremo anche quello.

E quindi abbiamo spiegato il discorso che vi feci sulla formattazione, quando prendemmo base 10 e dicemmo che $3 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^3 = 3 \cdot 3 \cdot 10^{(3+3)} = 9,000,0000$

Ma ora possiamo anche dire che $3 \cdot 10^{-1} = 3 \cdot (1/10^1) = 3 \cdot (1/10) = 3 \cdot 0.1 = 0.3$! Vedete che le cose cominciano a tornare.

Nella vita di ogni giorno le potenze non hanno grande importanza perché, a parte il quadrato e il cubo, intervengono solo in formule abbastanza specialistiche.

Esempi:

superficie del quadrato $S = l \cdot l$

superficie del cerchio $S = r^2 \cdot \pi$

spazio di frenata $S = K \cdot v^2$

Pitagora $c_1^2 + c_2^2 = i^2$

volume del cubo $V = l \cdot l \cdot l = l^3$

ecc

RADICI (QUADRATE)

La radice è l'operazione inversa dell'elevazione a potenza.

Dato un numero e una potenza, stabilire quale è il numero che, elevato a quella potenza, dà il numero dato.

Andiamo con ordine e diciamo subito che se l'elevazione al quadrato è l'elevazione più comune, anche la radice quadrata sarà la radice più comune. Nel caso di "non quadrata" si parla di "radice ennesima".

Mostrare come si indica la radice in matematica e in informatica. risultato = numero ^ (1/n). Spiegazione in base alle radici (potenza in frazione 1/n)

Così:

5*5 = 5^2 = 25

Analogamente la radice quadrata di 25 è 5 perché si dimostra che 5*5=25!

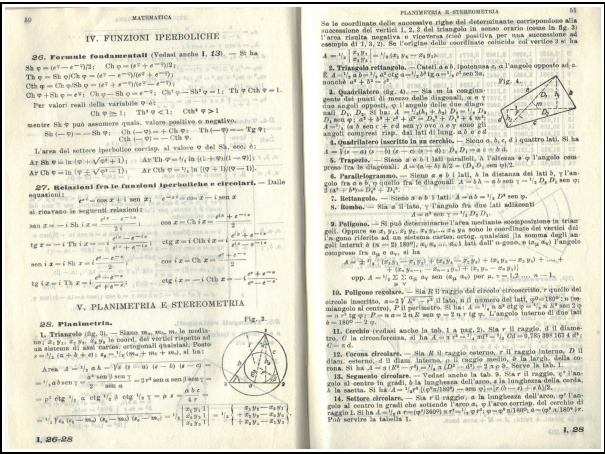
161-200									
n	n²	n³	√n	∛n	1/1000	Fattori primi	π/n	1/nπ²	1/nπ³
161	25921	4171281	12.69028	5.44012	6.21110E-7	7*23	0.006269	2.56E-5	2.03E-6
162	26244	4251528	12.70911	5.45136	6.21242E-7	2*3*3*3	0.006250	2.54E-5	2.02E-6
163	26569	4331717	12.72794	5.46260	6.21374E-7	7*23	0.006231	2.52E-5	2.01E-6
164	26896	4411944	12.74677	5.47384	6.21506E-7	2*3*3*3	0.006212	2.50E-5	2.00E-6
165	27225	4492215	12.76560	5.48508	6.21638E-7	3*5*7	0.006193	2.48E-5	1.99E-6
166	27556	4572526	12.78443	5.49632	6.21770E-7	2*3*3*3	0.006174	2.46E-5	1.98E-6
167	27889	4652879	12.80326	5.50756	6.21902E-7	7*23	0.006155	2.44E-5	1.97E-6
168	28224	4733272	12.82209	5.51880	6.22034E-7	2*3*3*3	0.006136	2.42E-5	1.96E-6
169	28561	4813705	12.84092	5.53004	6.22166E-7	11*17	0.006117	2.40E-5	1.95E-6
170	28900	4894176	12.85975	5.54128	6.22298E-7	2*3*3*3	0.006098	2.38E-5	1.94E-6
171	29241	4974687	12.87858	5.55252	6.22430E-7	3*11*13	0.006079	2.36E-5	1.93E-6
172	29584	5055232	12.89741	5.56376	6.22562E-7	2*3*3*3	0.006060	2.34E-5	1.92E-6
173	29929	5135811	12.91624	5.57500	6.22694E-7	7*23	0.006041	2.32E-5	1.91E-6
174	30276	5216424	12.93507	5.58624	6.22826E-7	2*3*3*3	0.006022	2.30E-5	1.90E-6
175	30625	5297075	12.95390	5.59748	6.22958E-7	5*7*13	0.006003	2.28E-5	1.89E-6
176	30976	5377760	12.97273	5.60872	6.23090E-7	2*3*3*3	0.005984	2.26E-5	1.88E-6
177	31329	5458487	12.99156	5.61996	6.23222E-7	3*11*13	0.005965	2.24E-5	1.87E-6
178	31684	5539252	13.01039	5.63120	6.23354E-7	2*3*3*3	0.005946	2.22E-5	1.86E-6
179	32041	5620059	13.02922	5.64244	6.23486E-7	7*23	0.005927	2.20E-5	1.85E-6
180	32400	5700900	13.04805	5.65368	6.23618E-7	2*3*3*3	0.005908	2.18E-5	1.84E-6
181	32761	5781785	13.06688	5.66492	6.23750E-7	3*11*13	0.005889	2.16E-5	1.83E-6
182	33124	5862704	13.08571	5.67616	6.23882E-7	2*3*3*3	0.005870	2.14E-5	1.82E-6
183	33489	5943657	13.10454	5.68740	6.24014E-7	7*23	0.005851	2.12E-5	1.81E-6
184	33856	6024640	13.12337	5.69864	6.24146E-7	2*3*3*3	0.005832	2.10E-5	1.80E-6
185	34225	6105655	13.14220	5.70988	6.24278E-7	3*5*7	0.005813	2.08E-5	1.79E-6
186	34596	6186704	13.16103	5.72112	6.24410E-7	2*3*3*3	0.005794	2.06E-5	1.78E-6
187	34969	6267785	13.17986	5.73236	6.24542E-7	7*23	0.005775	2.04E-5	1.77E-6
188	35344	6348900	13.19869	5.74360	6.24674E-7	2*3*3*3	0.005756	2.02E-5	1.76E-6
189	35721	6429951	13.21752	5.75484	6.24806E-7	3*11*13	0.005737	2.00E-5	1.75E-6
190	36100	6511040	13.23635	5.76608	6.24938E-7	2*3*3*3	0.005718	1.98E-5	1.74E-6
191	36481	6592169	13.25518	5.77732	6.25070E-7	7*23	0.005699	1.96E-5	1.73E-6
192	36864	6673328	13.27401	5.78856	6.25202E-7	2*3*3*3	0.005680	1.94E-5	1.72E-6
193	37249	6754517	13.29284	5.79980	6.25334E-7	3*11*13	0.005661	1.92E-5	1.71E-6
194	37636	6835736	13.31167	5.81104	6.25466E-7	2*3*3*3	0.005642	1.90E-5	1.70E-6
195	38025	6916985	13.33050	5.82228	6.25598E-7	7*23	0.005623	1.88E-5	1.69E-6
196	38416	6998264	13.34933	5.83352	6.25730E-7	2*3*3*3	0.005604	1.86E-5	1.68E-6
197	38809	7079573	13.36816	5.84476	6.25862E-7	3*5*7	0.005585	1.84E-5	1.67E-6
198	39204	7160912	13.38699	5.85600	6.25994E-7	2*3*3*3	0.005566	1.82E-5	1.66E-6
199	39601	7242281	13.40582	5.86724	6.26126E-7	7*23	0.005547	1.80E-5	1.65E-6
200	40000	7323680	13.42465	5.87848	6.26258E-7	2*3*3*3	0.005528	1.78E-5	1.64E-6

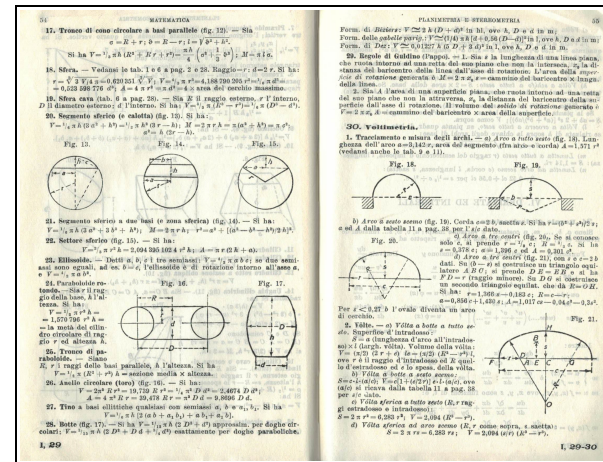
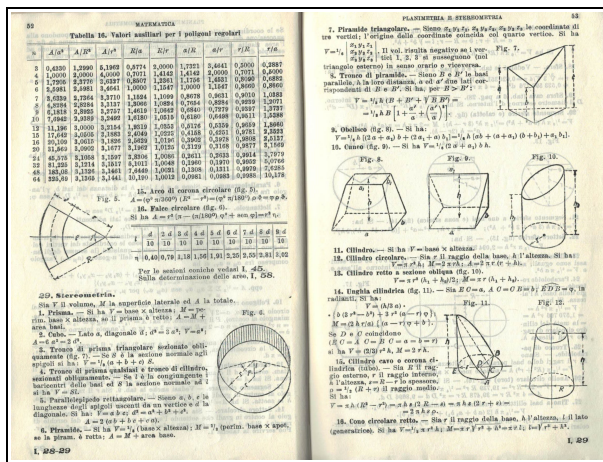
— 138 —

201-240									
n	n²	n³	√n	∛n	1/1000	Fattori primi	π/n	1/nπ²	1/nπ³
201	40401	8120601	14.17405	5.85777	1.00000E-3	3*67	0.005509	1.76E-5	1.63E-6
202	40804	8202008	14.19288	5.86901	1.00000E-3	2*101	0.005490	1.74E-5	1.62E-6
203	41209	8283427	14.21171	5.88024	1.00000E-3	7*29	0.005471	1.72E-5	1.61E-6
204	41616	8364864	14.23054	5.89148	1.00000E-3	2*3*3*3	0.005452	1.70E-5	1.60E-6
205	42025	8446325	14.24937	5.90272	1.00000E-3	5*41	0.005433	1.68E-5	1.59E-6
206	42436	8527808	14.26820	5.91396	1.00000E-3	2*3*3*3	0.005414	1.66E-5	1.58E-6
207	42849	8609313	14.28703	5.92520	1.00000E-3	7*29	0.005395	1.64E-5	1.57E-6
208	43264	8690840	14.30586	5.93644	1.00000E-3	2*3*3*3	0.005376	1.62E-5	1.56E-6
209	43681	8772389	14.32469	5.94768	1.00000E-3	11*19	0.005357	1.60E-5	1.55E-6
210	44100	8853960	14.34352	5.95892	1.00000E-3	2*3*3*3	0.005338	1.58E-5	1.54E-6
211	44521	8935561	14.36235	5.97016	1.00000E-3	7*29	0.005319	1.56E-5	1.53E-6
212	44944	9017184	14.38118	5.98140	1.00000E-3	2*3*3*3	0.005300	1.54E-5	1.52E-6
213	45369	9098829	14.40001	5.99264	1.00000E-3	3*7*13	0.005281	1.52E-5	1.51E-6
214	45796	9180496	14.41884	6.00388	1.00000E-3	2*3*3*3	0.005262	1.50E-5	1.50E-6
215	46225	9262185	14.43767	6.01512	1.00000E-3	5*43	0.005243	1.48E-5	1.49E-6
216	46656	9343904	14.45650	6.02636	1.00000E-3	2*3*3*3	0.005224	1.46E-5	1.48E-6
217	47089	9425645	14.47533	6.03760	1.00000E-3	7*31	0.005205	1.44E-5	1.47E-6
218	47524	9507408	14.49416	6.04884	1.00000E-3	2*3*3*3	0.005186	1.42E-5	1.46E-6
219	47961	9589193	14.51299	6.06008	1.00000E-3	3*7*13	0.005167	1.40E-5	1.45E-6
220	48400	9671000	14.53182	6.07132	1.00000E-3	2*3*3*3	0.005148	1.38E-5	1.44E-6
221	48841	9752829	14.55065	6.08256	1.00000E-3	7*31	0.005129	1.36E-5	1.43E-6
222	49284	9834680	14.56948	6.09380	1.00000E-3	2*3*3*3	0.005110	1.34E-5	1.42E-6
223	49729	9916553	14.58831	6.10504	1.00000E-3	11*19	0.005091	1.32E-5	1.41E-6
224	50176	10000000	14.60714	6.11628	1.00000E-3	2*3*3*3	0.005072	1.30E-5	1.40E-6
225	50625	10084500	14.62597	6.12752	1.00000E-3	3*5*5	0.005053	1.28E-5	1.39E-6
226	51076	10169056	14.64480	6.13876	1.00000E-3	2*3*3*3	0.005034	1.26E-5	1.38E-6
227	51529	10253667	14.66363	6.14999	1.00000E-3	7*31	0.005015	1.24E-5	1.37E-6
228	51984	10338332	14.68246	6.16123	1.00000E-3	2*3*3*3	0.005000	1.22E-5	1.36E-6
229	52441	10423051	14.70129	6.17247	1.00000E-3	11*19	0.004981	1.20E-5	1.35E-6
230	52900	10507820	14.72012	6.18371	1.00000E-3	2*3*3*3	0.004962	1.18E-5	1.34E-6
231	53361	10592649	14.73895	6.19495	1.00000E-3	3*7*13	0.004943	1.16E-5	1.33E-6
232	53824	10677528	14.75778	6.20619	1.00000E-3	2*3*3*3	0.004924	1.14E-5	1.32E-6
233	54289	10762467	14.77661	6.21743	1.00000E-3	7*31	0.004905	1.12E-5	1.31E-6
234	54756	10847464	14.79544	6.22867	1.00000E-3	2*3*3*3	0.004886	1.10E-5	1.30E-6
235	55225	10932517	14.81427	6.23991	1.00000E-3	5*47	0.004867	1.08E-5	1.29E-6
236	55696	11017628	14.83310	6.25115	1.00000E-3	2*3*3*3	0.004848	1.06E-5	1.28E-6
237	56169	11102795	14.85193	6.26239	1.00000E-3	7*31	0.004829	1.04E-5	1.27E-6
238	56644	11188016	14.87076	6.27363	1.00000E-3	2*3*3*3	0.004810	1.02E-5	1.26E-6
239	57121	11273291	14.88959	6.28487	1.00000E-3	11*19	0.004791	1.00E-5	1.25E-6
240	57600	11358620	14.90842	6.29611	1.00000E-3	2*3*3*3	0.004772	9.80E-6	1.24E-6

— 137 —

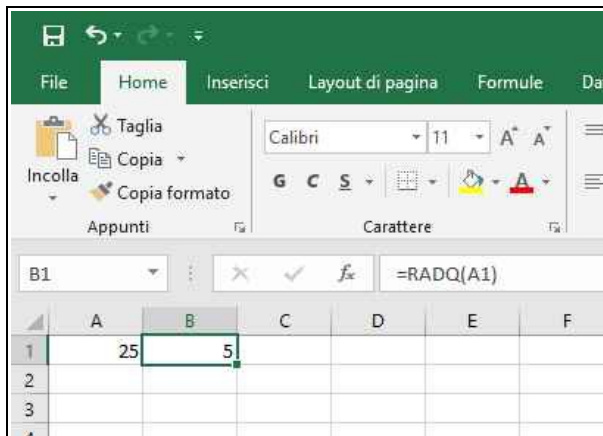
Prima della diffusione delle comode calcolatrici i manuali riportavano delle tabelle che permettevano (normalmente nell'intervallo 1-1000) di ottenere potenze e radici (e non solo) dei vari numeri.



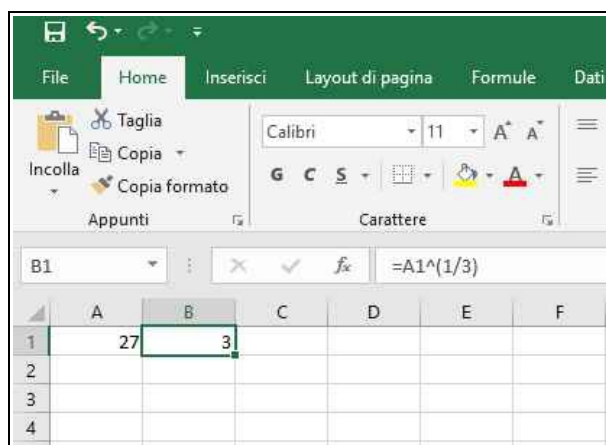


Qui sopra alcune pagine tratte dal “manuale dell'ingegnere” di qualche decennio fa. Sono riportate le formule per il calcolo di superfici e volumi di alcune figure comuni. Ma si noti anche una tabella che permetteva di conoscere questi risultati senza dover ricorrere al calcolo: era una semplificazione comune prima dell'avvento delle calcolatrici

Piccolo cenno alla funzione $\text{sqr}(x)$, $\text{sqrt}(x)$, $\text{radq}(x)$ usata in informatica



Dovendo effettuare una radice quadrata in Excel c'è una comodissima funzione



Se invece abbiamo bisogno di qualche cosa di più complesso (qui una radice cubica) dobbiamo ricorrere ad altre funzioni (nell'esempio abbiamo elevato a 1/3 la base usando, appunto, la funzione dell'elevazione a potenza generica)

4 – NUMERI E SOLDI

Questo paragrafo tratta di matematica finanziaria.

Le formule sono molte e complesse, e anche in continua evoluzione. Vedremo di stare sul semplice.

Innanzitutto diciamo che per capire e maneggiare queste cose è bene avere un'idea di un'altra possibilità offerta dalla matematica: le progressioni. Una progressione è una serie di numeri in cui due numeri successivi sono legati da una legge (somma per le progressioni matematiche, prodotto per quelle geometriche). La quantità da sommare o da usare per la moltiplicazione si chiama ragione. In questo modo dato un numero è facile stabilire quale sarà il successivo. Ci sono delle formule che permettono di “saltare” i passaggi e determinare l'ennesimo elemento, calcolare la somma di un certo intervallo e così via.

Comincio con una storiellina: si dice che l'inventore del gioco degli scacchi fece così felice il suo faraone (per il quale aveva inventato il gioco) da meritarsi un premio. Chiese che su una scacchiera fosse posto un chicco di grano sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza, otto sulla quarta e così via. Il faraone pensava di cavarsela con qualche sacco, ma quando furono fatti i conteggi la realtà fu ben diversa (si trattava di una progressione geometrica):

Questa storia contribuisce ad arricchire di mistero e astuzia il gioco degli scacchi. Proviamo a capire perché il funzionario del Faraone diceva una cosa esatta. Come dimostro più sotto, il numero di chicchi che il Faraone avrebbe dovuto dare all'ambasciatore persiano è il seguente:

18.446.744.073.709.551.615

ossia quasi **18,5 miliardi di miliardi** di chicchi!

Per renderci conto di quanto grande sia questo numero, ricordiamo che la produzione **mondiale** di grano nel 1993 è stata di 5640,6 milioni di quintali e nel 1994 di 5279,8 milioni di quintali (fonte: Calendario Atlante De Agostini 1997). Assumiamo, per eccesso, che la produzione mondiale sia di 6000 milioni di quintali ovvero

produzione mondiale di grano = 600 milioni di tonnellate.

Per difetto assumiamo che ci vogliano 10 chicchi per fare un grammo e che il numero di chicchi sia 18 miliardi di miliardi. Allora il peso dei chicchi che il Faraone avrebbe dovuto consegnare all'ambasciatore persiano vale

peso di 18 miliardi di miliardi di chicchi = 1.800.000 milioni di tonnellate

ovvero la produzione mondiale di grano di ben **tremila anni!**

Quando si ha un prestito (o un investimento, insomma un uso di soldi) questa operazione va compensata. Si parla di interesse. Si esprime normalmente in percentuale (5%, si legge cinque per cento). In questo esempio dovrò corrispondere a chi mi impresta una certa somma (capitale) 5 poniamo € per ogni 100 € prestati e per ogni periodo di tempo. Altrettanto dovrebbe fare la banca (non lo fa più da tempo) dove deposito i miei soldi, in quanto con i miei soldi la banca potrà effettuare delle operazioni che le frutteranno degli utili. In pratica siamo di fronte alla solita proporzione, tanto che in matematica un interesse del 5% viene indicato con $i=0.05$ (più maneggevole nelle formule).

L'interesse può essere semplice o composto.

E' semplice se il capitale frutta una quantità costante per ogni periodo. Esempio: prestito di 500 €, tasso del 5%, 25 € il primo anno, 25 il secondo, 25 il terzo e così via.

• REGIME FINANZIARIO DELL'INTERESSE SEMPLICE O CAPITALIZZAZIONE SEMPLICE	
$I=Cit$	Calcolo dell'interesse semplice prodotto da un capitale C investito al tasso i per un tempo t
$M=C(1+it)$	Calcolo del montante prodotto da un capitale C investito al tasso i per un tempo t
$C = \frac{M}{1+it}$	Calcolo del Valore attuale C di un capitale che al tempo t e al tasso i ha un valore nominale M
$I = S_r = \frac{Mit}{1+it}$	Calcolo dello sconto semplice o razionale applicato ad un capitale M al tasso i per un tempo t

Se invece l'interesse maturato viene rimesso nel capitale è evidente che ad ogni periodo bisogna ricalcolare il tutto su una nuova base. Nell'esempio precedente il mio interesse del primo anno rimane pari a 25 €. Solo che al secondo anno l'interesse non andrà calcolato sulla base “500 €”, ma su $500 + 25 = 525$, e quindi in questo secondo periodo l'interesse non sarà più di 25 € ma 26.25 (ovvero il 5 % su base 525).

• REGIME FINANZIARIO DELL'INTERESSE COMPOSTO O CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA	
$M=C(1+i)^n$	Calcolo del montante prodotto da un capitale C al tasso i per n anni
$C = \frac{M}{(1+i)^n} = M(1+i)^{-n}$	Calcolo del Valore attuale C di un capitale che dopo n anni e al tasso i ha un valore nominale M
$I=M-C$	Calcolo dell'interesse/sconto composto
$n = \frac{\log M / C}{\log(1+i)}$	Calcolo del numero di anni che occorre investire un capitale C per avere alla fine il montante M al tasso di interesse i
$i_k = \sqrt[k]{1+i} - 1$	Conversione dal tasso annuo i al tasso frazionato i_k
$i = (1+i_k)^k - 1$	Conversione dal tasso frazionato i_k al tasso annuo i
$j_k = k \cdot i_k$	Calcolo del tasso annuo nominale convertibile
$i_k = j_k/k$	Calcolo del tasso frazionato noto quello convertibile

Un esempio di interesse semplice si ha nei BOT (prestito allo Stato) dove ci sono le “cedole” che ogni anno possono essere incassate, l'interesse composto viene usato nelle transazioni normali. Però, per i periodi inferiori all'anno, le frazioni vengono calcolate in interesse semplice.

Apriamo una piccola parentesi per illustrare una sigla che troviamo nella pubblicità, quando ci vogliono proporre un prestito, per lo più per finanziare qualche acquisto:



TAN E TAEG COSA SONO:

- TAN:** misura gli interessi da pagare annualmente per il prestito
- TAEG:** indica il costo del prestito comprensivo di tutte le spese
- TAN o TAEG?** Il prestito più conveniente è quello con il TAEG minore

Le definizioni che abbiamo dato prima sono alla base per il calcolo dei piani di ammortamento, ovvero di quelle tabelle che ci permettono di conoscere l'andamento della restituzione di un prestito. Quando comperiamo un appartamento difficilmente abbiamo il capitale necessario, e allora ricorriamo ad un mutuo. Il mutuo viene restituito a rate e nei primi anni una parte significativa della rata serve per pagare gli interessi su quanto prestato, e solo una piccola parte serve per la restituzione del capitale. Progredendo nel tempo sempre più capitale è restituito, e quindi sempre minore è la parte della rata che serve a coprire gli interessi del mutuo.

# rata	Rata	Capitale	Interesse	Debito Estinto	Debito Residuo
0		-	-	-	300.000,00
1	35.068,80	20.068,80	15.000,00	20.068,80	279.931,20
2	35.068,80	28.155,87	6.912,92	48.224,67	251.775,33
3	35.068,80	28.851,19	6.217,61	77.075,86	222.924,14
4	35.068,80	29.563,67	5.505,13	106.639,53	193.360,47
5	35.068,80	30.293,75	4.775,05	136.933,27	163.066,73
6	35.068,80	31.041,85	4.026,95	167.975,13	132.024,87
7	35.068,80	31.808,43	3.260,36	199.783,56	100.216,44
8	35.068,80	32.593,94	2.474,85	232.377,50	67.622,50
9	35.068,80	33.398,85	1.669,94	265.776,36	34.223,64
10	35.068,80	34.223,64	845,16	300.000,00	-
totali	350.687,97	300.000,00	50.687,97		

Esempio di piano d'ammortamento

La formulazione della tabella qui sopra riportata veniva fatta a mano e con apposite tabelle

r = i = 5% n = 1-50 5% COEFF.									
n	q^n	$\frac{1}{q^n}$	$q^n - 1$	$\frac{1}{q^n - 1}$	$\frac{q^n - 1}{r}$	$\frac{r}{q^n - 1}$	$\frac{q^n - 1}{r q^n}$	$\frac{r q^n}{q^n - 1}$	
n	$(1+i)^n$	$\frac{1}{(1+i)^n}$	$(1+i)^n - 1$	$\frac{1}{(1+i)^n - 1}$	$\frac{1}{(1+i)^n - 1}$	$\frac{1}{(1+i)^n - 1}$	$\frac{1}{(1+i)^n - 1}$	$\frac{1}{(1+i)^n - 1}$	
0	*1,0000	*1,00 00	*0,0000 00	—	*0,0000	—	*0,0000 00	—	
1	0500	*0,95 238	0500 00	*20,00 0	1,0000	*1,00 00	0,9523 8	*1,05 00	
2	1025	99 703	2025 0	*9,75 61	2,0500	*0,48 75 0	1,8594	*0,53 789	
3	1576	86 384	1576 3	6,34 42	3,1525	31 72 1	2,7232	36 721	
4	2155	82 270	2155 1	4,64 02	4,3101	23 20 1	3,5469	28 201	
5	2763	78 353	*2762 8	3,61 95	5,5256	18 09 7	4,3295	23 097	
6	3401	74 622	3401 0	2,94 03	6,8019	14 70 2	5,0757	19 702	
7	4071	71 068	4071 0	2,45 64	8,1420	12 28 2	5,7864	17 282	
8	4775	67 684	4774 6	2,09 44	*9,5191	10 47 2	6,4632	15 472	
9	5513	64 461	5513 3	1,81 38	*11,027	09 05 90	7,1078	14 059	
10	*1,6289	*0,61 391	*0,6288 9	*1,59 01	*12,578	*0,07 95 05	*7,7217	*0,12 959	
11	7103	58 468	7103 4	1,40 78	14,207	07 03 89	8,3064	12 039	
12	7959	55 684	7958 6	1,25 65	15,917	06 28 25	8,8633	11 283	
13	8856	53 032	8856 5	1,12 91	17,713	05 04 59	9,3939	10 546	
14	*1,9799	50 507	*0,9799 3	1,02 05	19,599	05 10 24	*9,8986	10 102	
15	*2,0789	48 102	*1,0789	0,92 685	21,579	04 03 42	*10,380	09 622	
16	1629	45 811	1629	0,84 540	23,657	04 22 70	10,838	09 2270	
17	2020	43 630	2020	0,77 398	25,840	03 86 09	11,274	08 8609	
18	4066	41 552	4066	0,71 092	28,132	03 55 46	11,690	08 5546	
19	5270	39 573	5270	0,65 490	30,539	03 27 45	12,085	08 2745	
20	*2,6533	*0,37 689	*1,6533	*0,60 485	*33,066	*0,03 02 43	*12,462	*0,08 0243	
21	2,7860	36 804	1,7860	0,55 002	35,710	*0,02 70 06	12,821	*0,07 7006	

PROBLEMI ELEMENTARI (Vedi: esercizi)		CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA		RISORTE CETER POSTUMATE	
Dati	Capitale iniziale	$(1+i)^n$	Coef. di riporto o di partecipazione	DENOMINAZIONE DEI COEFFICIENTI	
Risultati	Capitale finale	$\frac{1}{(1+i)^n}$	Coef. di sconto o di partecipazione		
Dati	Capitale iniziale	$(1+i)^n$	Coef. degli interessi composti	DENOMINAZIONE DEI COEFFICIENTI	
Risultati	Interessi finali	$\frac{1}{(1+i)^n}$	Coef. di capitalizzazione di redditi periodici		
Dati	Capitale iniziale	$(1+i)^n$	Coef. della accumulazione finale	DENOMINAZIONE DEI COEFFICIENTI	
Risultati	Accumulazione finale (Es. Periodicità posticipata)	$\frac{1}{(1+i)^n}$	Termine di costituzione o di reintegrazione (Es. Coef. di trasformazione di periodicità posticipate in annualità costanti)		
Dati	Accumulazione finale	$\frac{1}{(1+i)^n}$	Termine di costituzione o di reintegrazione (Es. Coef. di trasformazione di periodicità posticipate in annualità costanti)	DENOMINAZIONE DEI COEFFICIENTI	
Risultati	Annualità di costituzione o di reintegrazione	$\frac{1}{(1+i)^n}$	Coef. della accumulazione iniziale		
Dati	Annualità di ammortamento	$\frac{1}{(1+i)^n}$	Termine di ammortamento (Es. Coef. di trasformazione di periodicità anticipate in annualità costanti)	DENOMINAZIONE DEI COEFFICIENTI	
Risultati	Accumulazione iniziale (Es. Periodicità anticipata)	$\frac{1}{(1+i)^n}$	Coef. della accumulazione iniziale		
Dati	Accumulazione iniziale	$\frac{1}{(1+i)^n}$	Termine di ammortamento (Es. Coef. di trasformazione di periodicità anticipate in annualità costanti)	DENOMINAZIONE DEI COEFFICIENTI	
Risultati	Annualità di ammortamento	$\frac{1}{(1+i)^n}$	Coef. della accumulazione iniziale		

Ma era un'operazione lunga e molto tediosa perché ogni casella dipende dall'altra (e qualsiasi modifica, anche piccola, richiedeva un ricalcolo da zero). Per la storia: fu così che Dan Brickling (nel 1979) inventò VisiCalc, il “nonno” di Excel e il primo foglio di calcolo.

Oggi la formulazione del piano di ammortamento si può fare con Excel (e le sue funzioni), ma di fatto ci sono molti siti on line che permettono questo calcolo. Ad esempio si veda <https://www.mutuonline.it/guide-mutui/calcolo-ammortamento-mutuo.asp>

In questo modo sarà facile rispondere alle domande “quante rate mi conviene fare? Poche e corpose in modo da terminare presto o più economiche ma per un periodo più lungo? E quanto dovrò restituire nei vari casi?”

5 - STRUMENTI DI CALCOLO

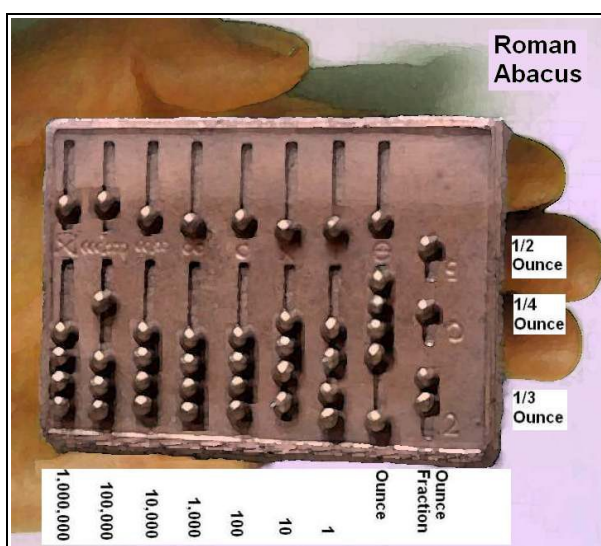
Nell'ordine parleremo di pallottoliere, logaritmi, regolo calcolatore, (Normogrammi), calcolatrici e computer.

Questa sarà una lezione discorsiva.

A Trieste esiste un museo del calcolo (presso ITIS Volta, in via monte Grappa). Visitabile su richiesta (l'Università ci è stata alcuni anni fa).

5.1 - Il pallottoliere,

in uso già dai romani. Ancora in uso in oriente, da noi per i bambini.



Pallottoliere romano. Ancora oggi viene usato in Oriente.



Pallottoliere per bambini. Il pallottoliere (più propriamente “abaco”) non viene solo usato per effettuare una semplice somma contando i “grani” mossi, ma può venir usato per operazioni più complesse. In rete si trovano ampie spiegazioni che potranno soddisfare le curiosità.

5.2 - Logaritmi

Il logaritmo nasce con NEPERO (1614), Briggs tavole (1616)

Definizione: il logaritmo è l'esponente che bisogna dare alla base per ottenere il numero dato. Ci sono alcune regole, ad esempio: il logaritmo del risultato di una moltiplicazione è la somma dei logaritmi dei due fattori.

Concetto già visto (quando abbiamo parlato della moltiplicazione di numeri espressi in formato esponenziale).

Uso, caratteristica (parte che indica il numero di cifre della parte intera, mantissa (tabulata), parti proporzionali

N: 5400 – 5799 Log: 73 239 – 76 335														
°	'	''	N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.
9	0	1 30 0	540	73 239	247	255	263	272	280	288	296	304	312	
1	10	541	320	328	336	344	352	360	368	376	384	392		
2	20	542	400	408	416	424	432	440	448	456	464	472		
3	30	543	480	488	496	504	512	520	528	536	544	552		9
4	40	544	560	568	576	584	592	600	608	616	624	632	1	0,9
5	50	545	640	648	656	664	672	679	687	695	703	711	3	1,8
6	1 31 0	546	719	727	735	743	751	759	767	775	783	791	5	2,7
7	10	547	799	807	815	823	830	838	846	854	862	870	7	3,6
8	20	548	878	886	894	902	910	918	926	933	941	949	9	4,5
9	30	549	957	965	973	981	989	997	005	013	020	028	1	5,4
10	40	550	74 036	044	052	060	068	076	084	092	099	107	3	6,3
11	50	551	115	123	131	139	147	155	162	170	178	186	5	7,2
12	1 32 0	552	194	202	210	218	226	233	241	249	257	265	7	8,1
13	10	553	273	280	288	296	304	312	319	327	335	343	9	
14	20	554	351	359	367	374	382	390	398	406	414	421		
15	30	555	429	437	445	453	461	468	476	484	492	500	1	8
16	40	556	507	515	523	531	539	547	554	562	570	578	3	0,8
17	50	557	586	593	601	609	617	624	632	640	648	656	5	1,6
18	1 33 0	558	663	671	679	687	695	702	710	718	726	733	7	2,4
19	10	559	741	749	757	764	772	780	788	796	803	811	9	3,2
20	20	560	819	827	834	842	850	858	865	873	881	889	1	4,0
21	30	561	896	904	912	920	927	935	943	950	958	966	3	4,8
22	40	562	974	981	989	997	005	012	020	028	035	043	5	5,6
23	50	563	75 051	059	066	074	082	089	097	105	113	120	7	6,4
24	1 34 0	564	128	136	143	151	159	166	174	182	189	197	9	7,2
25	10	565	205	213	220	228	236	243	251	259	266	274		
26	20	566	282	289	297	305	312	320	328	335	343	351		
27	30	567	358	366	374	381	389	397	404	412	420	427		
28	40	568	435	442	450	458	465	473	481	488	496	504	1	7
29	50	569	511	519	526	534	542	549	557	565	572	580	3	0,7
30	1 35 0	570	587	595	603	610	618	626	633	641	648	656	5	1,4
31	10	571	664	671	679	686	694	702	709	717	724	732	7	2,1
32	20	572	740	747	755	762	770	778	785	793	800	808	9	2,8
33	30	573	815	823	831	838	846	853	861	868	876	884	1	3,5
34	40	574	891	899	906	914	921	929	937	944	952	959	3	4,2
35	50	575	967	974	982	989	997	005	012	020	027	035	5	5,6
36	1 36 0	576	76 042	050	057	065	072	080	087	095	103	110	7	6,3
37	10	577	118	125	133	140	148	155	163	170	178	185	9	
38	20	578	193	200	208	215	223	230	238	245	253	260		
39	30	579	268	275	283	290	298	305	313	320	328	335		
°	'	''	N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.
540'' – 580''; 5133'' – 5680'' – 6172''			540'' – 580''; 5286'' – 5557'' – 5815''											
S: 6,685 57 ...53 ...52 ...51			T: 6,685 58 ...67 ...68 ...69											

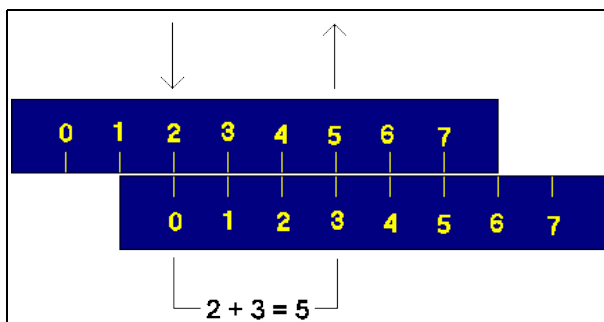
— 14 —

— 14 —

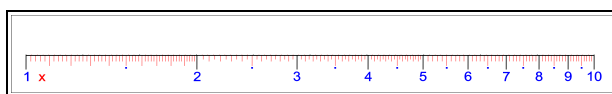
Una pagina di una vecchia tavola dei logaritmi, necessaria per trasformare i numeri nei loro logaritmi (e viceversa). Questa pagina va dal 5400 al 5799, ma anche dal 54.00 al 57.99 e così via: sarebbe cambiato solo la caratteristica, ovvero la parte intera del logaritmo.

5.3 - Regolo

Sommare due numeri con un righello

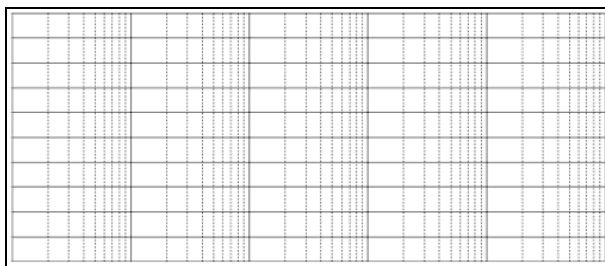


Se si volesse costruire una semplice macchina per effettuare le somme si potrebbero usare due righelli graduati, messi in successione come nel disegno. Sarebbe sufficiente far scorrere il righello inferiore in maniera appropriata e poi leggere il risultato su quello superiore. Analogamente....



...se si usa una scala logaritmica, anziché centimetrata, si possono eseguire SOMME DI LOGARITMI, ovvero moltiplicazioni (ma anche divisioni, elevazioni a potenza e molte altre operazioni, ma non somme e sottrazioni)

La scala logaritmica può anche essere ripetuta e fungere da base in alcuni diagrammi:



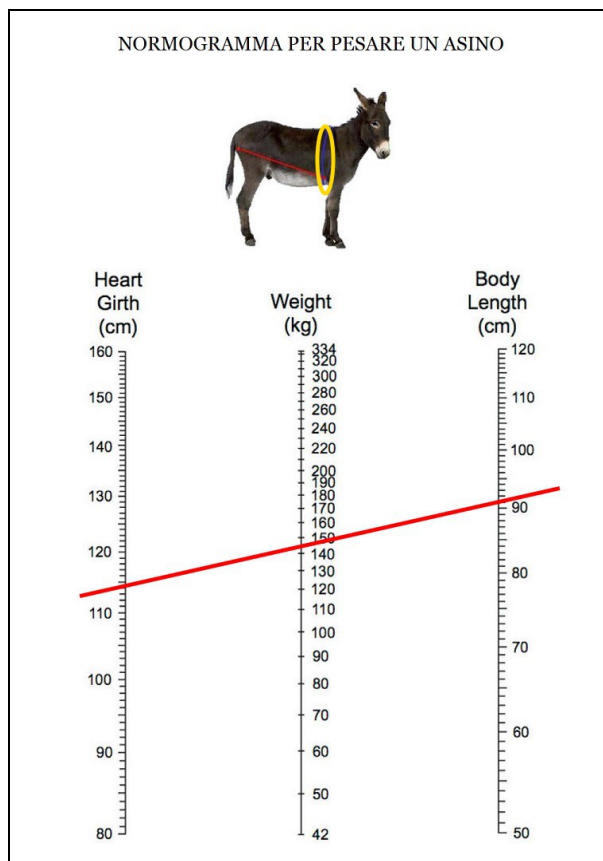
Regolo on line: <http://www.antiquark.com/sliderule/sim/n909es/virtual-n909-es.html>

Museo del regolo: https://sliderulemuseum.com/SRM_Home.htm

Cenno alla possibilità di avere fogli di vario tipo on line (fra cui quelli logaritmici):
<https://incompetech.com/graphpaper/>

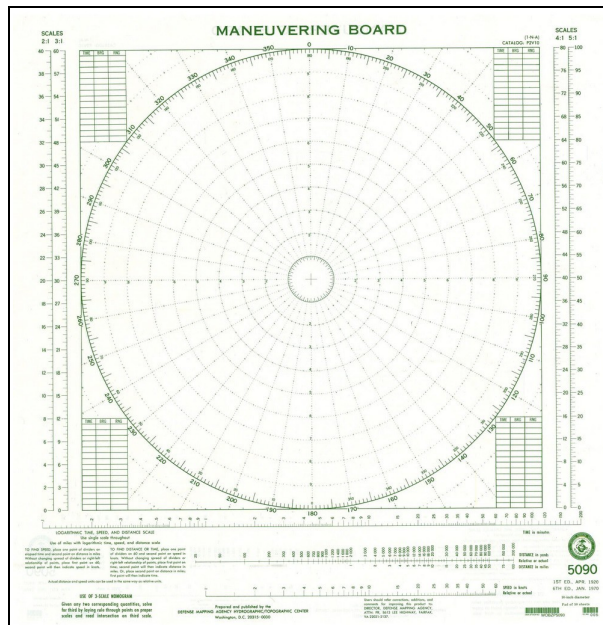
04 - Normogrammi

Esempio di normogramma. Si tratta di scale grafiche opportunamente disposte in modo che sia possibile “entrare” con due dati e ricavarne il terzo.



In questo esempio si “entra” con la circonferenza toracica di un asino (in centimetri – colonna di sinistra) e con la lunghezza del tronco (in centimetri - colonna di destra). I due punti vengono collegati con una linea che intersecherà la colonna centrale mostrando il peso dell'animale (in kg - al centro)

Rapportatore diagramma

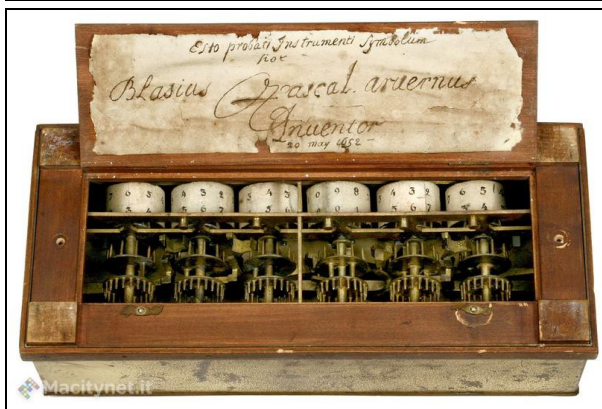


Un esempio applicativo (molto affascinante) di normogrammi, il “rapportatore diagramma”. Serve per effettuare calcoli navali desumendo i dati dalle osservazioni al radar. Siccome vi è la necessità di

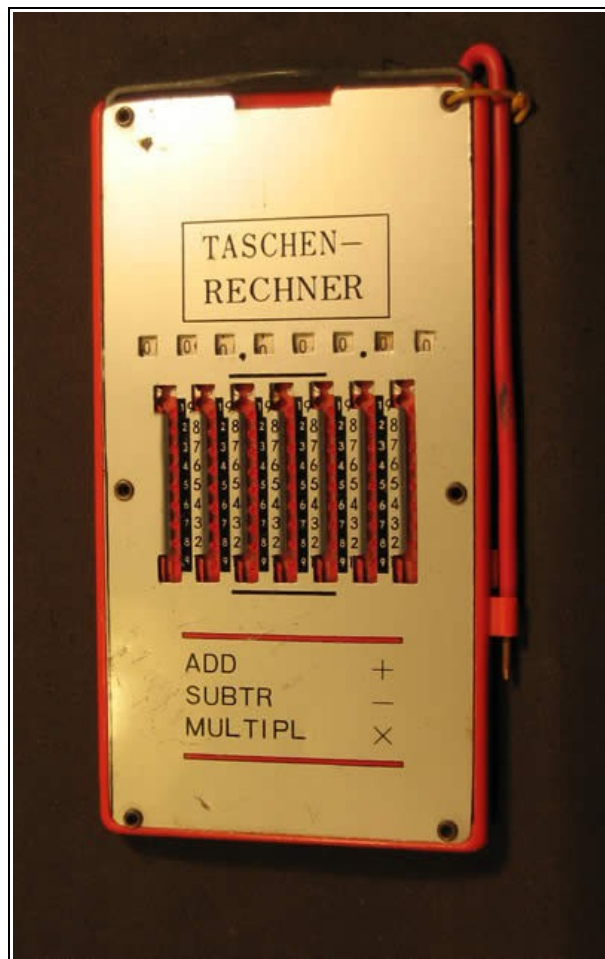
dedurre la velocità (relativa) in base alle osservazioni (distanza e tempo), il foglio predisposto porta in basso tre linee che permettono di effettuare questo calcolo

5.5 - Calcolatrici

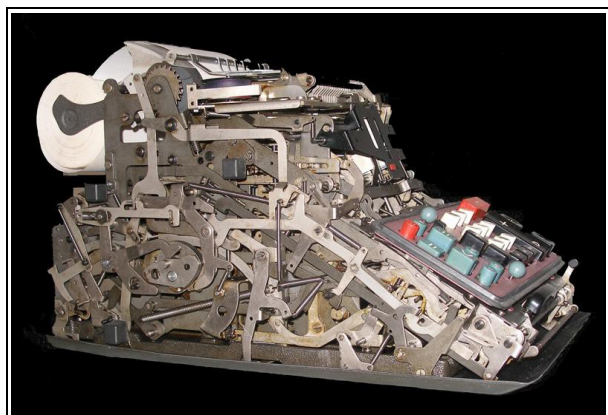
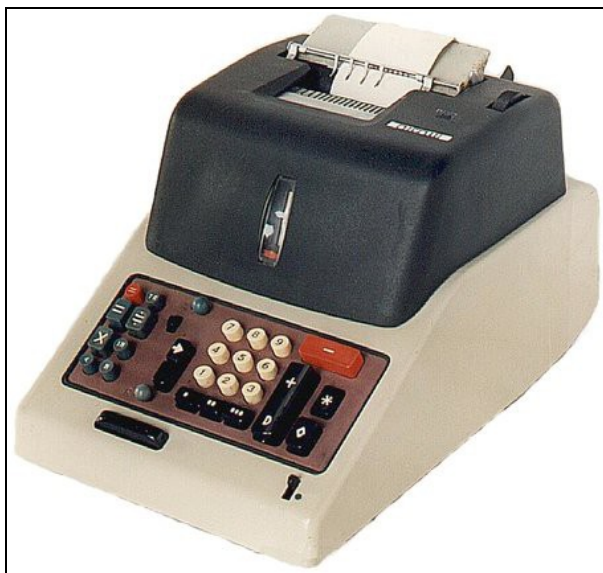
Pascalina, 1646 (ma centocinquanta anni prima L. da Vinci)



La calcolatrice tascabile nasce da molto lontano, ma è una specie di pallottoliere



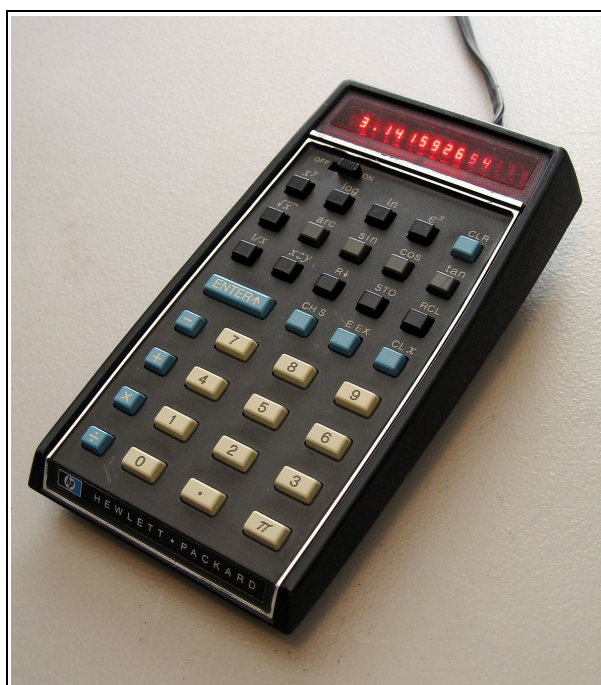
Calcolatrici olivetti e a tre totalizzatori.



Nasce la calcolatrice elettronica moderna (anni 60...70)



Nasce la calcolatrice elettronica scientifica moderna (HP35 anni 70)



5.6 - Computer

Prima macchina programmabile (a vapore!), era enorme: Charles Babbage (1833, mai realizzata)

Il computer nasce molto tempo fa, ma la sua vera evoluzione si ha durante la II guerra mondiale (usato per decrittare)

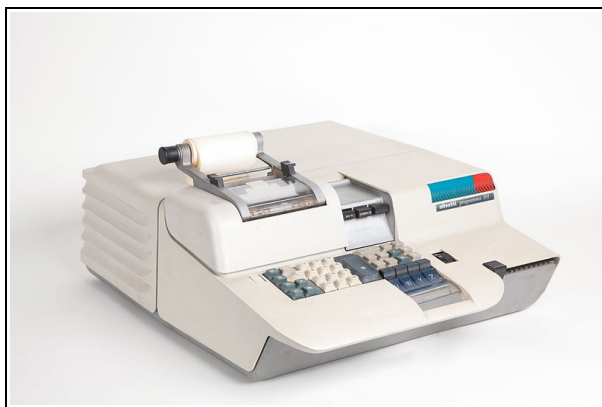
Il primo computer Apple (1976): Apple I apre l'era dell'home computer e del personal computer



Commodore 64 (1975-1980)



Olivetti programma 101, il primo personal: 1962-1964 (un misconosciuto orgoglio italiano!)



PC IBM, 1981!



5.7 - Matematica (on line)

Oggi per sviluppare formule ed altre attività di studi ci sono molti siti on line. Ad esempio:

<https://www.youmath.it/>

(ma converrà fare una ricerca in rete)

6 - DIAGRAMMI

6.1-Definizione

Relazione biunivoca fra i punti rappresentati nel disegno (o nello spazio) e i valori di una espressione matematica. Più spesso di una funzione (che prevede un dato input ed uno output).

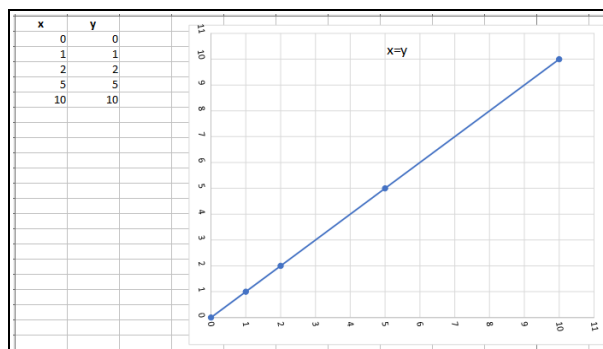
Serve per studiare il comportamento delle variabili (cosa succede alla variabile se cambio il dato di ingresso), ma può anche servire per risolvere problemi.

6.2 - Sistemi di coordinate

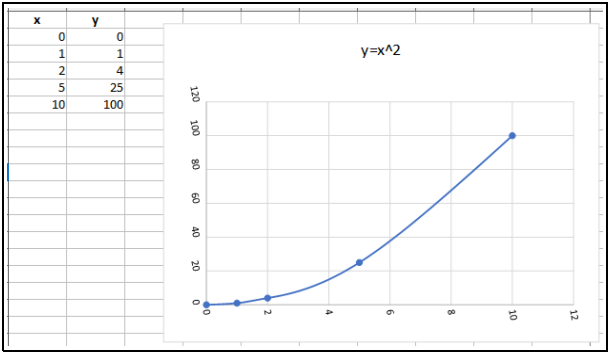
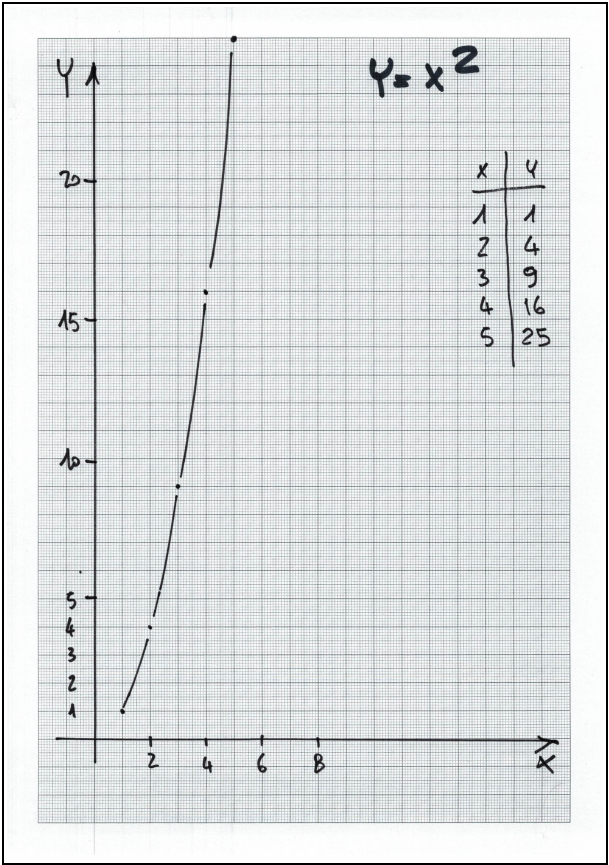
- sulla retta (lineare)
- cartesiane sul piano (ascisse ed ordinate)
- polari (origine, alfa orario o antiorario... Occhio alle notazioni angolari!)
- cartesiane nello spazio (x, y, z)
- altri sistemi (cartesiane non ortogonali, geografiche)
- altre rappresentazioni e cenno alla grafica del computer (diagrammi a barre, a torta eccetera)
- occhio alla scala! (Soprattutto quella delle ordinate, spesso si taglia una parte e si evidenzia solo parte del fenomeno)
- excel e i diagrammi

5.3 - Esempio, come fare

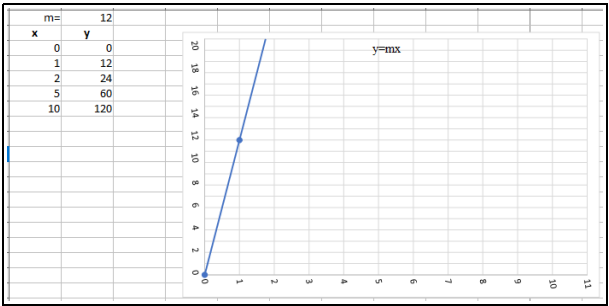
$y=x$, fare la tabella e mostrare il grafico



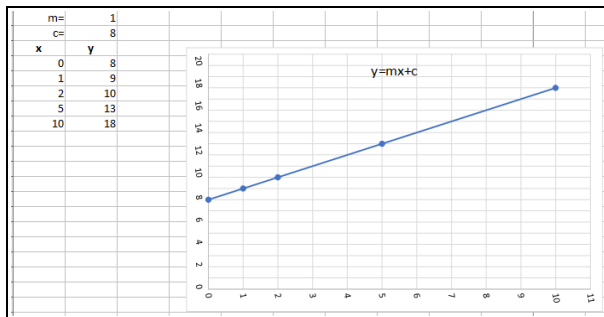
$y=x^2$, fare la tabella, mostrare grafico e curvilineo (questo è fatto a mano e poi con il computer)



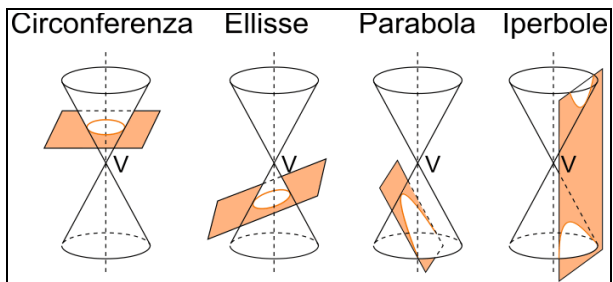
$y = mx$



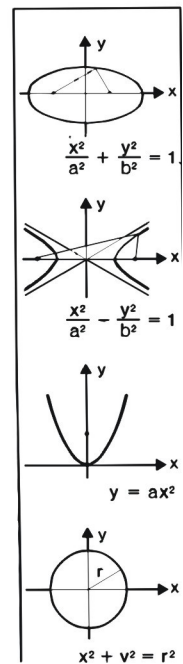
$$y=mx+c$$



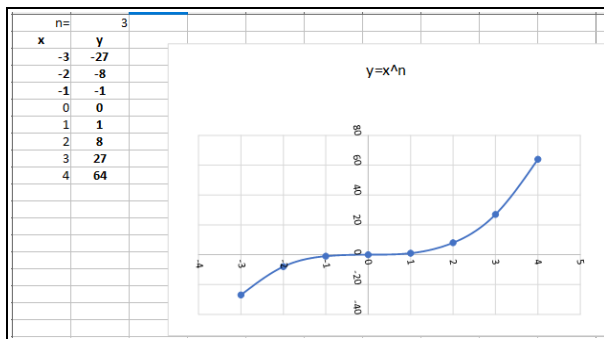
NOTA: se c'è di mezzo una potenza al quadrato si parla di coniche (vedere allegati)



Coniche e loro equazioni.

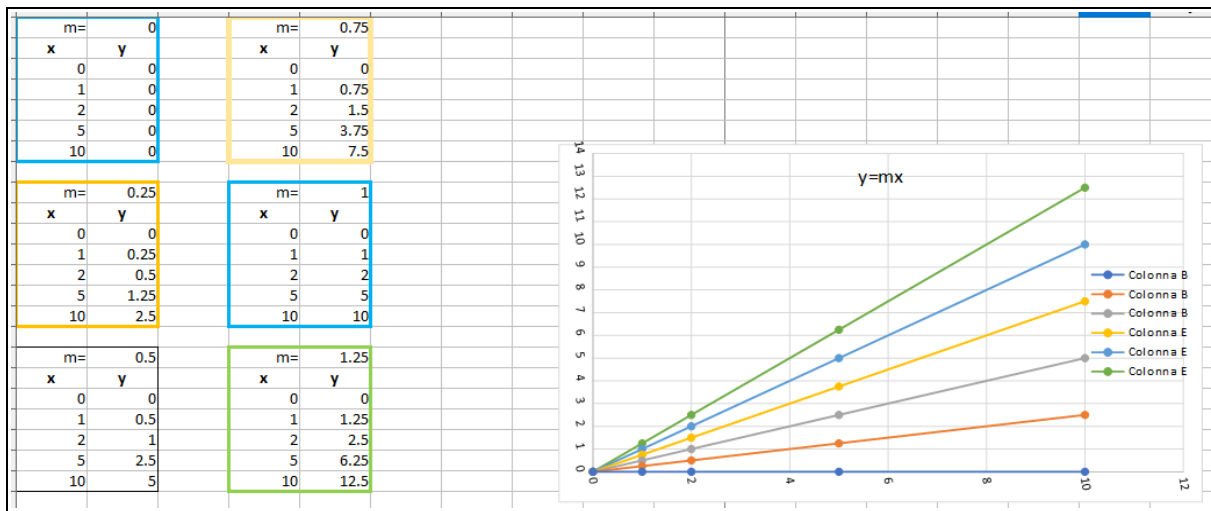


NOTA: se l'esponente è >2 allora si hanno curve più complesse



6.4 - Non più di una equazione

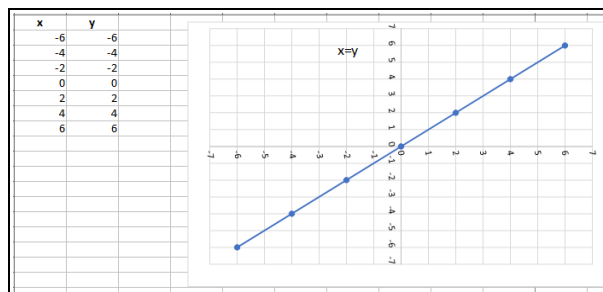
Ogni linea (retta o curva o "strana") rappresenta una equazione (non si possono rappresentare più equazioni con una retta). Però sul diagramma si possono disegnare più linee di più equazioni. Esempio $Y=mx$ per $m = 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25$ eccetera



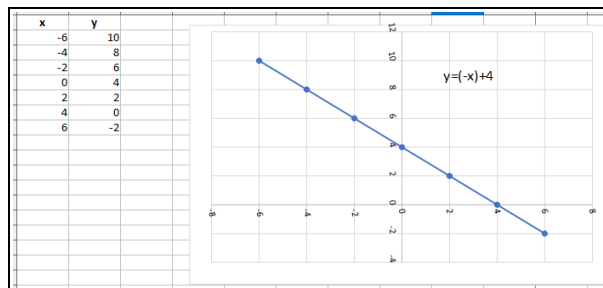
6.5 - Esempi di rette

(Le funzioni di grado superiore sono simili, ma più complesse, per ora ci limitiamo al primo grado perché il concetto è simile)

Esempio di retta con valori negativi.



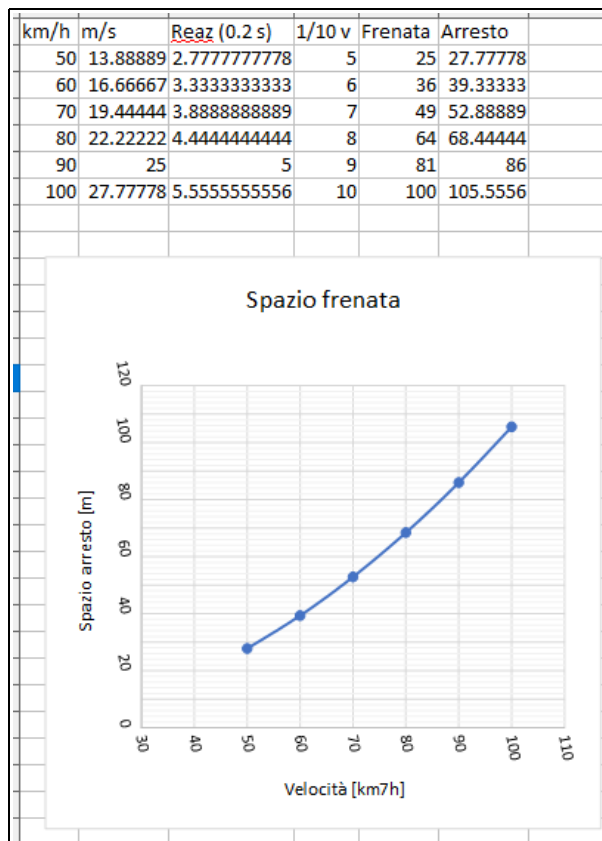
Esempio di una retta con valori "rovesciati" $y=(-1)x+4=-x+4$



6.6 - Esempio ad una variabile: la frenata

Il diagramma mostra lo spazio di arresto di una frenata in funzione della velocità. Una parte è simil-lineare (tempo di reazione 0.2 s) ed una secondo la nota formula $(v/10)^2$.

Se si "entra" con la velocità si ha lo spazio totale di arresto (quanto bisogna frenare prima di finire contro un ostacolo fermo). **DISTANZA DI SICUREZZA!**



6.7 - Esempio a 2 variabili e soluzione del problema

L'esempio mostra come si risolve graficamente un problema.

Fra Trieste e Pordenone in treno ci sono 124 km.

A Trieste c'è l'origine del kilometraggio (0), a Pordenone la fine (124).

Ci sono due treni, uno che parte ad un certo orario da Trieste, ed uno da Pordenone. Il primo (da Trieste) è un treno passeggeri che viaggia a 100 km/h di media (costanti e senza fermate). Da Pordenone il treno è merci, e viaggia a 60 km/h (costanti e senza fermate).

Da Trieste il treno parte alle 10:30, da Pordenone alla 11:05 (11.1) - NOTA: le ore in questo esercizio saranno decimali per semplificare.

Ricordiamo che quindi i km percorsi sono delle rette, e ricordiamo che dati due punti la retta è individuata.

Si chiede l'ora di arrivo dei due treni, il punto e l'ora di incrocio.

Possiamo senz'altro fare la seguente tabella:

TRENO PASSEGGERI DA TRIESTE

Primo punto km 0, ora 10.5. Secondo punto km 150 (oltre l'arrivo) dopo 1.5 ore, ovvero alle 12.

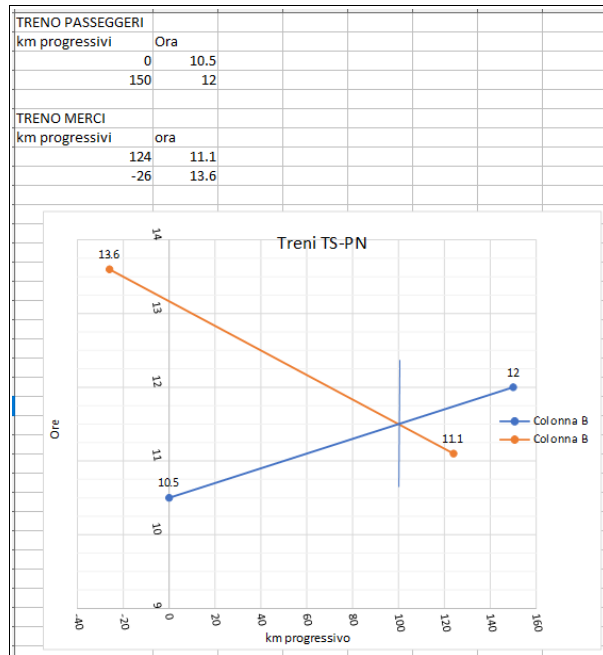
TERNO MERCI DA PORDENONE

Primo punto km 124, ora 11.1. Secondo punto km $124-150=-26$ (oltre l'arrivo) dopo $150/60=2.5$ ore, ovvero alle 13.6 (13:36).

Possiamo individuare due rette.

L'intersezione della singola retta con l'asse delle x ci darà l'ora di arrivo, mentre l'intersezione delle due rette ci darà il punto di incontro.

Il tutto, per comodità, viene tabulato in excel.



I treni:

Il passeggeri arriverà a Pordenone circa alle 11.75 (11:45)

Il merci arriverà a Trieste circa alle 13.3 (13:18)

I due treni si incontreranno al km 100 alle ore 11.5 (11:30)

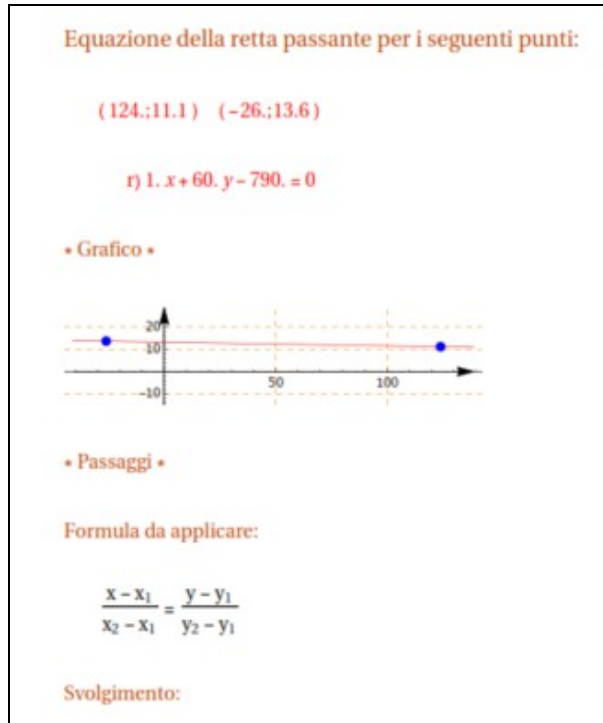
VERIFICA:

Per il treno passeggeri $124:x=100:60 - x=74.4$ minuti. $10:30+74.4=11:44$

Per il treno merci $124:x=60:60 - x=124$ minuti. $11.1+124=13:18$

Si prega di notare che ho usato anche valori negativi, questo per permettere il calcolo mnemonico (ad esempio i treni sono stati calcolati su tratti che si potevano calcolare a mente, anche se al di fuori del percorso interessato. Si noti anche che la base delle distanze è la progressiva chilometrica, quindi una base abbastanza "assoluta".

Per quanto riguarda la soluzione analitica (in pratica la verifica di quanto risulta dal disegno, si è semplicemente detto che si cercava un punto in cui le due y erano uguali.



Impostazione per il treno merci, quello passeggeri è simile e non viene riportata

.....

Equazione in forma esplicita rispetto alla y

$$y = -0.0166667 x + 13.1667$$

Soluzione per il treno merci, quello passeggeri è simile e non viene riportata

.....

Risoluzione della seguente equazione:

$$0.0103448 x + 10.5 = 13.1557 - 0.0166667 x$$

*** Svolgimento ***

$$0.0270115 x = 2.6557$$

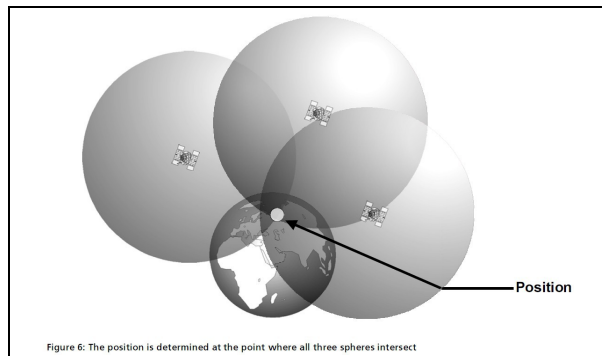
Soluzione:

$$1. x = 98.3174$$

Le due equazioni vengono poste come uguali. Essendo una sola variabile è sufficiente svilupparle in maniera elementare. Così si viene a conoscere la x cercata, ovvero la progressiva (esatta e non più stimata su un grafico) di incontro dei treni.

6.8 - Esempio nello spazio: applicazione GPS

Un'applicazione (complessa) di sviluppi di formule sul principio dei treni dell'esempio proposto è data dalla moderna navigazione con il GPS. (Anche in questo caso la matematica viene usata in maniera pesante, ma nascosta all'utente che è il fruitore). Il punto viene fatto considerando la distanza (calcolata dagli strumenti) dal satellite che ruota attorno alla terra, è in posizione nota e trasmette a intervalli ben precisi in modo che si possa calcolare la distanza dell'osservatore. Sulla terra è fissata una terna di assi cartesiani. Per ogni satellite ricevuto viene calcolato il “luogo di posizione”, (ovvero una sfera) che rappresenta una superficie su cui certamente si trova l'osservatore. Disponendo di tre sfere (che si intersecano vicendevolmente) si ottiene un unico punto che è la posizione del ricevitore.

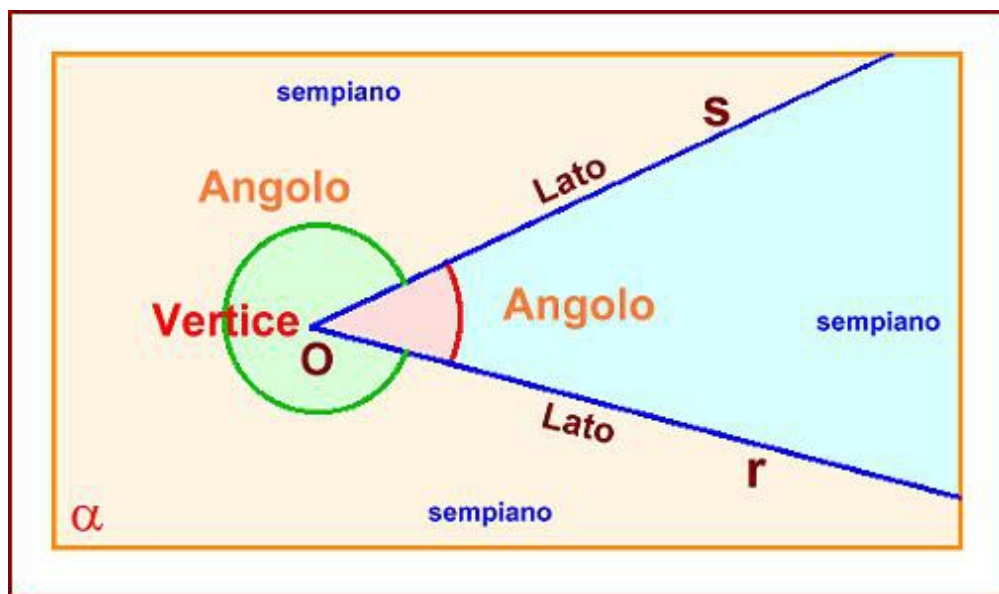


7 - TRIANGOLI E NUMERI

L'angolo è una nozione che usiamo in continuazione, dal momento che viviamo in uno spazio geometrico. L'uso dei triangoli è una ovvia conseguenza degli angoli. Ma perché ripromettersi di parlare di triangoli e non di quadrati, pentagoni, esagoni e così via? Perché il triangolo è la più semplice delle figure piane che si possa avere (non esistono figure piane chiuse con due soli lati), e perché una qualsiasi figura di qualsivoglia forma, anche fortemente irregolare, può essere sezionata in elementi base, appunto triangoli, che, risolti, ci permettono di conoscere tutti gli elementi della nostra figura più complessa.

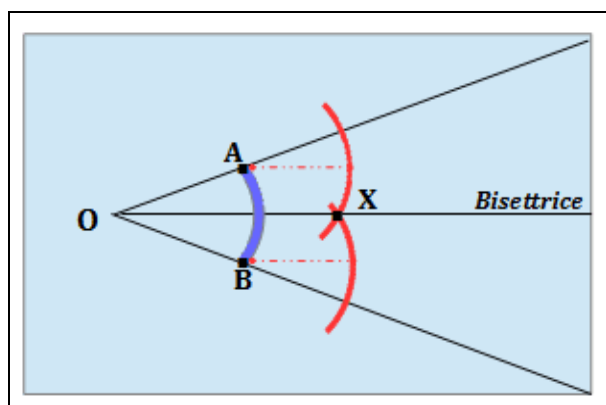
Non parleremo moltissimo di triangoli perché prima voglio dedicare un po' di tempo a definire e farvi ben comprendere gli angoli (che dei triangoli sono solo un elemento, benché fondamentale) e le funzioni trigonometriche (che sono alla base della risoluzione dei triangoli e non solo).

Dunque gli angoli: si tratta di due semirette che hanno in comune il punto di origine (che si chiama vertice dell'angolo) e per lo più non sono coincidenti. In questo modo dividono il piano in due parti. L'ampiezza della loro apertura è, appunto, l'angolo.



L'ampiezza può essere qualsiasi, ma determinate ampiezze generano angoli che hanno dei nomi particolari. Così se il piano è diviso in $3/4$ e $1/4$ si ha l'angolo retto, se è diviso a metà quello piatto, se le due rette coincidono si ha l'angolo giro.

Gli angoli possono essere sommati, sottratti, divisi e così via. Esistono delle bellissime costruzioni geometriche che lo fanno. Non siamo ad un corso di disegno e ve ne mostrerò solo una semplice semplice: dividere un angolo in due parti uguali.



Siccome l'angolo (a meno dell'angolo giro che è un caso particolare) divide il piano in due è evidente che esistono due angoli, quello interno e quello esterno. La loro somma dà, appunto l'angolo giro (con le ovvie formule inverse).

Potremo anche dire che un angolo è acuto o ottuso a seconda che sia inferiore o superiore all'angolo retto.

Ricordatevi anche il termine angolo CONGRUENTE, riservato a angoli superiori all'angolo giro (per infilare un cavatappi nel tappo bisogna fare cinque giri ovvero $360 \times 5 = 1800$ gradi!)

In realtà non è importantissimo stabilire il verso di apertura della seconda semiretta rispetto alla prima, ma ciò diviene essenziale quando si cominciano a fare calcoli o quando si intende parlare di fenomeni di cui studiamo la dinamica. Lo dico perché, al solito, c'è un po' di confusione in giro dal momento che i matematici ragionano in senso antiorario e i topografi (ma anche i naviganti) in senso orario, e questo porta ad incomprensioni soprattutto nelle macchine di calcolo.

Ci sono moltissimi modi per misurare gli angoli. Alcuni noti, altri più di nicchia.

Cominciamo dal classico: angoli SESSAGESIMALI (360 gradi l'angolo giro, 60 primi in un grado, 60 secondi in un primo). Esempio: $32^{\circ}12'14''$ (ma anche 32:12:41)

Siccome è difficile fare le somme (ricordate?) per la presenza del "60" si usano anche i SESSADECIMALI (360, e poi decimali normalissimi). Esempio: 32.21138888° (è l'angolo di prima)

I geometri usano sempre i gradi CENTESIMALI (100, e poi decimali, talvolta c e cc per similitudine - sono detti anche GRADI FRANCESI, adesso GON). Esempio $373^{\circ}86^c84^{cc}$, ma anche 373.8684^{gon}

Già che ci siamo diremo che oggi, è un'esigenza recente, i naviganti usano il GPS dove gli angoli possono venir mostrati in $DDD^{\circ}MM.ddddd$, ma è un caso particolarissimo

Più interessante è il RADIANTE, che è decimale ed è il rapporto fra la circonferenza e il raggio. Quindi è un rapporto e non dipende dal raggio. L'angolo piatto vale PiGreco e quello giro $2 \times \text{PiGreco}$.

Analogamente quello retto vale $\text{PiGreco}/2$. Perché lo cito: perché è quello del SI ma soprattutto è quello dei computer. Se mai avrete la necessità di fare qualche calcolo usando Excel preparatevi al dover trasformare il vostro sistema in radianti. Cosa del resto facile perché di viene in aiuto la proporzione (ecco un altro buon motivo che giustifica perché ho insistito sulle proporzioni qualche settimana fa):

angolo piatto (quindi 180, oppure 200) sta a PiGreco = nostro angolo nel nostro sistema sta a angolo in

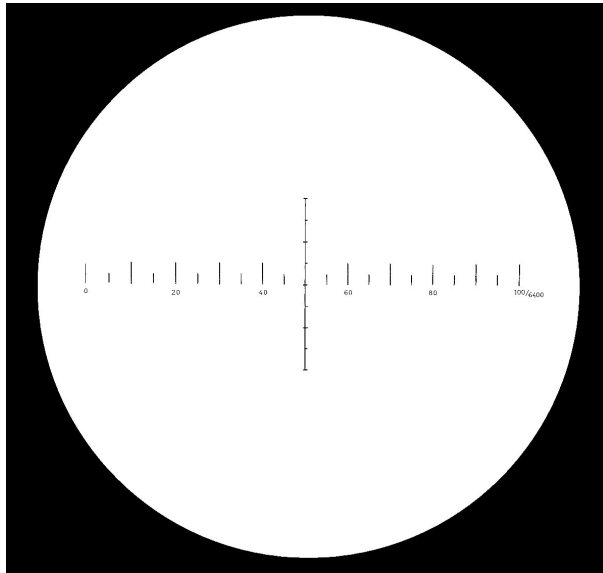
radianti

Da cui: angolo in radianti = $\text{PiGreco} * \text{nostro angolo} / \text{angolo piatto nel nostro sistema (180 o 200)}$

(Per fortuna ci sono anche funzioni specifiche già pronte)

NOTA: siccome siamo in fondo alle chiacchierate: il modo di scrivere le equazioni può essere differente fra quello del libro e quelle "su una riga sola", notazione usata nelle istruzioni (codice) dei programmi del computer - fine dell'informazione

I militari hanno anche un altro sistema, che qui cito solo perché alcuni di noi hanno l'età giusta per aver fatto il servizio militare: usano i MILLESIMI DI ARTIGLIERIA, che poi sono una specie di radianti ma rapportano 1 a 1000 in modo da poter stabilire una distanza (di un obiettivo da cannoneggiare).



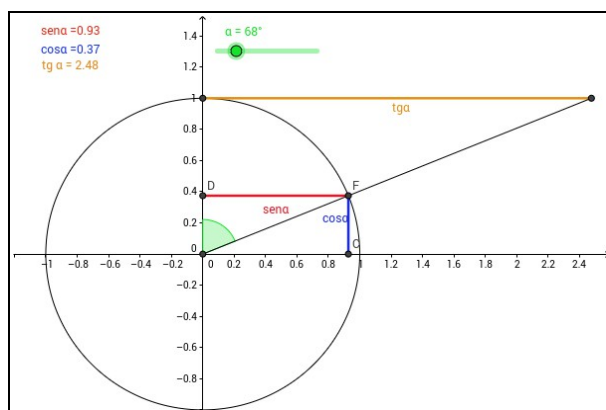
Bene o male finora abbiamo parlato di angoli e di cerchi (ricordate il radiante), ma nella realtà il cerchio va preso con le pinze (PiGreco non è un numero razionale ed è difficile in natura misurare uno sviluppo di una curva). Si preferisce ragionare in termini di distanze, magari perpendicolari ad una delle due semirette dell'angolo (dette anche "i lati").

Qui dovete impararlo a memoria:

CERCHIO DI RAGGIO UNO, sen, cos, tan, cotang

(Inverso ARCOSENO, eccetera)

Stiamo parlando delle FUNZIONI TRIGONOMETRICHE, che sono (erano) tabulate ed ora sono un tasto della calcolatrice scientifica.



Triangoli: come dice la parola sono figure ovviamente piane che si caratterizzano per avere tre angoli. Ma se hanno tre angoli hanno anche tre lati.

Un triangolo è definito se si conoscono tre elementi, di cui almeno uno è un lato (se sono noti solo i tre angoli si può solo parlare di una serie infinita di triangoli simili)..

Un triangolo sottostà ad alcune leggi che è bene sapere:

- somma degli angoli interni 180° (ovvero angolo piatto) * NON VALE PER TRIANGOLI SFERICI *
- un lato NON può essere più lungo della somma degli altri due
- un angolo può essere RETTO, si parla allora di triangolo RETTANGOLO (ma non è nulla di più che sapere che un angolo è 90° per definizione)
- un triangolo può essere equilatero, isoscele o scaleno

Quindi risolviamo i triangoli rettangoli: basterà osservare la figura delle funzioni trigonometriche dove in bella vista abbiamo un triangolo rettangolo. Quel triangolo rettangolo ha come cateti seno e coseno e come ipotenusa il valore unitario. Se a questo punto sovrapponiamo il nostro triangolo rettangolo (centrando il vertice opportunamente nel centro del cerchio) potremo operare con le solite proporzioni. E così scopriremo che il seno è il rapporto fra il cateto opposto e l'ipotenusa (e tutto il resto). Ma se il seno è il rapporto fra il cateto opposto e l'ipotenusa anche il cateto opposto si potrà ricavare nota l'ipotenusa e l'angolo (da cui ricaveremo il seno). E così per le altre funzioni....

15°

°	Log. Sen. nat.	Log. Cos. nat.	Log. Tang. nat.	Log. Cotg. nat.	°				
0	1,41 300	0,25 882	1,98 494	0,96 593	1,42 805	0,26 795	0,57 195	3,73 205	60
1	347	910	491	585	856	826	144	72 771	59
2	394	938	488	578	906	857	094	72 338	58
3	441	966	484	570	1,42 957	888	0,57 043	71 907	57
4	488	0,25 994	481	562	1,43 007	920	0,56 993	71 476	56
5	535	0,26 022	477	555	057	951	943	71 046	55
6	582	050	474	547	108	0,26 982	892	70 616	54
7	628	079	471	540	158	0,27 013	842	70 188	53
8	675	107	467	532	208	044	792	69 761	52
9	722	135	464	524	258	076	742	69 335	51
10	768	163	460	517	308	107	692	68 909	50
11	815	191	457	509	358	138	642	68 485	49
12	861	219	453	502	408	169	592	68 061	48
13	908	247	450	494	458	201	542	67 638	47
14	1,41 954	275	447	486	508	232	492	67 217	46
15	1,42 001	303	443	479	558	263	442	66 796	45
16	047	331	440	471	607	294	393	66 376	44
17	093	359	436	463	657	326	343	65 957	43
18	140	387	433	456	707	357	293	65 538	42
19	186	415	429	448	756	388	244	65 121	41
20	232	443	426	440	806	419	194	64 705	40
21	278	471	422	433	855	451	145	64 289	39
22	324	500	419	425	905	482	095	63 874	38
23	370	528	415	417	1,43 954	513	0,56 046	63 461	37
24	416	556	412	410	1,44 004	545	0,55 996	63 048	36
25	461	584	409	402	053	576	947	62 636	35
26	507	612	405	394	102	607	898	62 225	34
27	553	640	402	386	151	638	849	61 814	33
28	599	668	398	379	201	670	799	61 405	32
29	644	696	395	371	250	701	750	60 996	31
30	1,42 690	0,26 724	1,98 391	0,96 363	1,44 299	0,27 732	0,55 701	3,60 588	30

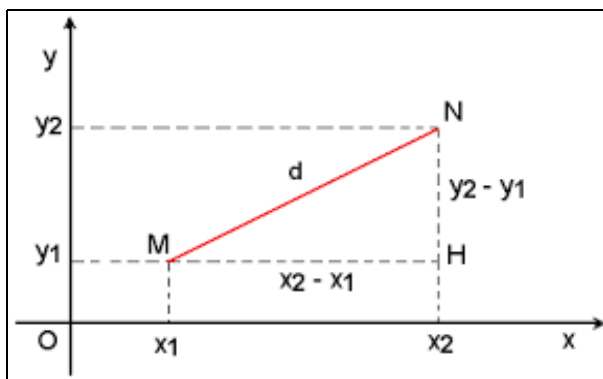
°	Log. Cos. nat.	Log. Sen. nat.	Log. Cotg. nat.	Log. Tang. nat.	°										
°	51	50	49	47	46	45	74°	4	3	240	239	238	237	°	
6	5,1	5,0	4,9	4,7	4,6	4,5	6	6	0,40	0,30	24,0	23,9	23,8	23,7	6
7	6,0	5,8	5,7	5,5	5,4	5,3	7	7	0,47	0,35	28,0	27,9	27,8	27,6	7
8	6,8	6,7	6,5	6,3	6,1	6,0	8	8	0,53	0,40	32,0	31,9	31,7	31,6	8
9	7,7	7,5	7,4	7,1	6,9	6,8	9	9	0,60	0,45	36,0	35,8	35,7	35,5	9
10	8,5	8,3	8,2	7,8	7,7	7,5	10	10	0,67	0,50	40,0	39,8	39,7	39,5	10
20	17,0	16,7	16,3	15,7	15,3	15,0	20	20	1,33	1,0	80,0	79,7	79,3	79,0	20
30	25,5	25,0	24,5	23,5	23,0	22,5	30	30	2,00	1,5	120,0	119,5	119,0	118,5	30
40	34,0	33,3	32,7	31,3	30,7	30,0	40	40	2,67	2,0	160,0	159,3	158,7	158,0	40
50	42,5	41,7	40,8	39,2	38,3	37,5	50	50	3,33	2,5	200,0	199,2	198,3	197,5	50

— 58 —

— 58 —

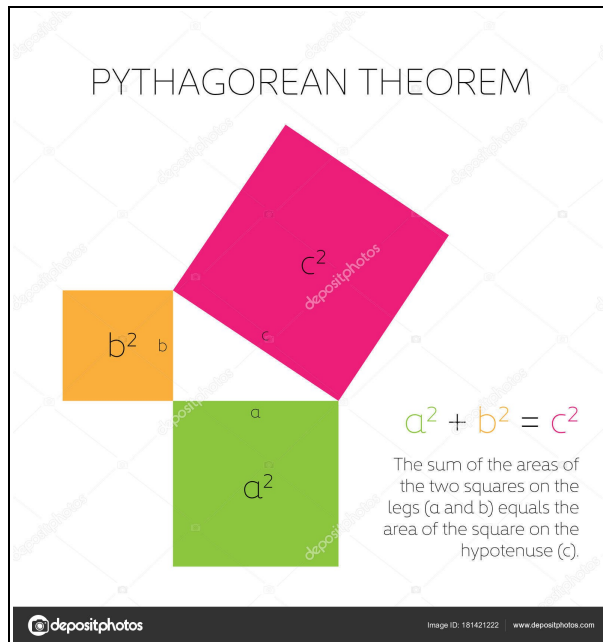
Una vecchia tabella delle funzioni. In essa si “entrava” con l'angolo desiderato e nelle colonne si trovavano i valori di seno, coseno, tangente o cotangente (sia “naturali” per l'uso con la calcolatrice, sia “logaritmi” per quei calcoli). Oggi le tabelle hanno perso di attualità, sostituite dalle più comode calcolatrici “scientifiche”.

I triangoli rettangoli sono molto importanti nei diagrammi (visti l'altra volta) perché ascisse ed ordinate (nei sistemi cartesiani) sono fra loro perpendicolari, e questo ci permette una grande serie di calcoli con pochissimi numeri o col solito tasto della calcolatrice.



In questo esempio si conoscono le coordinate di M ed N. Tutti gli elementi possono essere calcolati considerando che MNH è un triangolo rettangolo (in H).

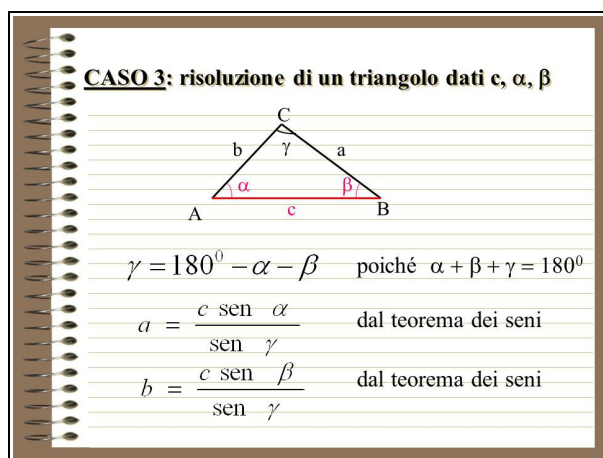
Detto per inciso: PITAGORA (cenno).



Se i triangoli NON sono rettangoli c'è bisogno di altre formule, fra cui il teorema dei seni e Carnot. Ce ne sono altre, ma soprassedo.

AAA -> no soluzioni

ALA -> seni + regola dei 180° (Il teorema dei seni dice che in un triangolo qualsiasi ogni lato è proporzionale al seno dell'angolo opposto). Siccome conosciamo due angoli possiamo determinare il terzo (ricordando che la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto), e poi applicare il teorema dei seni per calcolare gli altri angoli ancora ignoti.

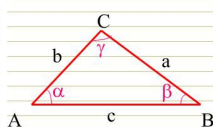


LAL -> Carnot

Abbiamo così ottenuto il

Teorema di Carnot (o del coseno)

In un triangolo il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, diminuito del doppio prodotto di questi per il coseno dell'angolo compreso.



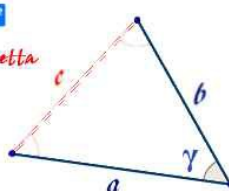
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

LLL -> Carnot modificato

teorema di Carnot

$a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) = c^2$

scrivo la formula diretta



noti 2 lati e l'angolo compreso calcolo il lato $\sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)} = c$

noti 3 lati o ricavo la formula inversa e calcolo l'angolo incognito $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} = \cos(\gamma)$

Esempi di momenti in cui usiamo gli angoli:

- determinazione (stima) della distanza (visione binoculare)
- lettura dell'ora (con orologio a lancette)
- c'era il disco del telefono
- il volante dell'auto e il manubrio dei mezzi a due ruote

CONCLUSIONE

Qui finisce la nostra passeggiata nella matematica.

Spero che ora non ne abbiate più paura perché vi ho mostrato quanto la usiate e quanto siete bravi ad usarla.

In futuro mi piacerebbe fare un'altra chiacchierata sulla FISICA. Perché, anche questo non vi è stato detto, siete anche tutti FISICI perché se dovete portare un sacco usate una carriola (quindi una leva), sapete che in salita e in discesa si fa più fatica che sul piano (piano inclinato, scomposizione delle forze, calcolo vettoriale), sapete che se la borsa della spesa è troppo pesante potete portarla in due persone (una per manico, di nuovo scomposizione di forze). E così via....

26 febbraio 2019

Giulio Salvador